



**AALBORG UNIVERSITY**  
DENMARK

**Aalborg Universitet**

## **Lastfordeling i brodæk**

Albertsen, A.

*Publication date:*  
1985

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*

Albertsen, A. (1985). *Lastfordeling i brodæk*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter. U/ Nr. U8502

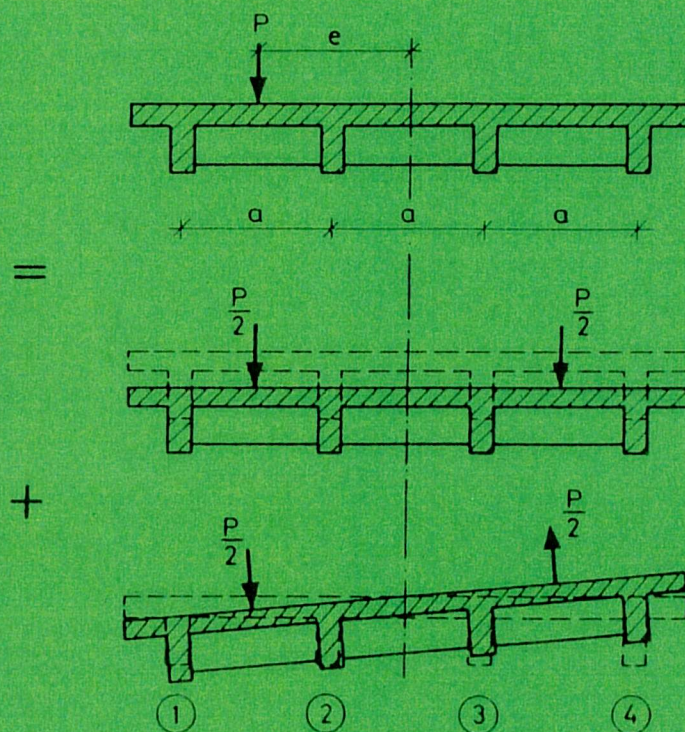
### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



Teksten er maskinkrevet af Ulla Pedersen.  
Figurerne er tegnet af Ingrid Christensen.

Supplerende RETTELSESLISTE til NOTE U8502 'Lastfordeling i brodæk'.

Side	Linie	Rettelse
12	5	Der tilføjes: med kraften anbragt ved den pågældende hovedbjælke
26	2	$C > 170$ rettes til $C > 250$
33	2 f.n.	fig. 33-35 rettes til fig. 33-34
36	fig. 36	Der tilføjes: $\lambda = \beta \cdot L$
37	8	I formel (5) skal faktoren $L/a$ tilføjes i tælleren i det første udtryk
38	fig. 37	For det tyndfligede I-profil er $I_V/I_L = 1,25 \cdot 10^{-4}$
40		I formel (7a) skal faktoren $k_V:(ka^2)$ <b>slettes</b>
46	1	$L = 25$ m rettes til $L = 12,5$ m
46	13 & 14	Størrelsen i parentes skal være $\frac{12,5}{2,5}$
57	5 & 6	Første slutparentes ) skal <b>slettes</b>
69	3	$M_1$ rettes til $M_3$
74	fig. 64	Til venstre for lighedstegnet skal der stå $q_z$
74	1 f.n.	$y_z$ rettes til $y_2$
79	1 f.n.	I nævneren skal $\alpha$ rettes til $\pi$



## INDHOLDSFORTEGNELSE

	Side
Forord	
Generelt	1
Brodækkets virkemåde	1
Formålet med opstilling af tilnærmede beregningsmetoder	2
Eksempler på brotværnsnit	4
Risteværk af bjælker uden vridningsstivhed	6
A. Risteværk med stive tværbjælker	6
Risteværk med konstant bjælkeafstand og -stivhed	7
Symmetrisk risteværk med varierende bjælkestivhed	12
Taleksempel 1	12
Ikke-symmetrisk risteværk	14
Fremgangsmåde hvis lasten ikke virker på en tværbjælke	15
Taleksempel 2	16
Flere tværbjælker i hvert brofag	18
B. Risteværk med eftergivelige tværbjælker	22
Risteværk med konstant bjælkeafstand og -stivhed	23
Risteværk med konstant bjælkeafstand, men forskellige bjælkestivheder	28
Flere tværbjælker i hvert brofag	31
Betydning af tværbjælker i nabofag	33
Taleksempel 3	33
Risteværk af bjælker med vridningsstivhed	36
A. Risteværk med stive tværbjælker	38
Risteværk med konstant bjælkeafstand og -stivhed	38
Risteværk med uens bjælkeafstande og -stivheder	43
Taleksempel 4	46
B. Risteværk med eftergivelige tværbjælker	47
Taleksempel 5	49
Risteværk beregnet som en ortotrop plade	55
Guyon-Massonet's metode	59
Taleksempel 6	62

	Side
Brodæk uden lastfordelende tværbjælker	70
Lastfordeling i brodæk med 2 hovedbjælker	72
Taleksempel 7	79
Taleksempel 8	80
Kasseprofil uden tværskot	82
Pladebroer	84
Beregning ved hjælp af elementmetoden	84
Beregning efter Guyon-Massonet's metode	87
Beregning af pladen som et risteværk	90

## FORORD

Formålet med denne note er at give en oversigt over lastfordelingsproblemer, der er almindeligt forekommende i brokonstruktioner, samt anwise tilnærmelsesmetoder til beregning af lastfordelingen.

Fremstillingen i noten er begrænset til at omfatte fordeling af laster vinkelret på brobanens plan. Der er overalt regnet med fordeling efter elasticitetsteorien, hvilket svarer til normal praksis inden for brobygning. Emnet skæve broer er ikke medtaget i denne note.

Behandlingen af emnet er ikke knyttet til et bestemt materiale. Resultaterne kan således benyttes f.eks. både for betonbroer, stålbroer og kompositbroer. Derimod kan der være forskel på, hvor godt de forskellige metoder og tilnærmelser egner sig til at beskrive forholdene i brodæk med forskellig opbygning.





## GENERELT

### Brodækkets virkemåde

En bro bærende overbygning består af brobaneplade, hovedbjælker og - eventuelt - tværbjælker.

Brobanepladens primære funktion er at danne underlag for det slidlag, hvorpå trafikken skal foregå, samt at føre trafiklasten over til hovedbjælkerne og eventuelt også til tværbjælkerne.

Hovedbjælkerne fører trafiklasten videre til broens understøtninger.

Tværbjælkerne sikrer hovedbjælkerne mod væltning og kipning samt modtager eventuelt en del af lasten fra brobanepladen og fører den til hovedbjælker eller understøtninger.

En dimensionering af brodækkets bestanddele på basis af ovenstående beskrivelse kunne bestå i en successiv beregning af brobaneplade, tværbjælker og hovedbjælker, altså en række hver for sig ret overskuelige opgaver.

Imidlertid er brodækkets virkemåde betydeligt mere kompleks. I stedet for en række plane systemer må brodækket betragtes som et integreret rumligt system. Dette indses f.eks. ved at betragte et brodæk under påvirkning af en koncentreret last, se fig. 1. Lasten  $P$  antages at virke over en tværbjælke. Umiddelbart ville man skønne, at den midterste bjælke skulle optage hele lasten og dimensioneres derfor. Hvis brodækket imidlertid skal bevare sin sammenhæng, må tværbjælken krumme sig som vist, og dette ses at medføre, at der overføres en del af lasten til de øvrige bjælker. Anordning af en tværbjælke har således medført en lastfordeling, hvorved midterbjælken kan dimensioneres for en last  $P - 2Q < P$ .

Da brobanepladen i hele brofagets længde ligeledes påtvinges en krumning, vil den også bidrage til lastfordelingen. Når der som her er anordnet egentlige tværbjælker, kan man dog normalt se bort fra pladens bidrag til lastfordelingen. Derimod er det ved dimensioneringen af pladen nødvendigt at medtage de ekstra påvirkninger, som forskellene i bjælkernes flytninger og vinkeldrejninger medfører.

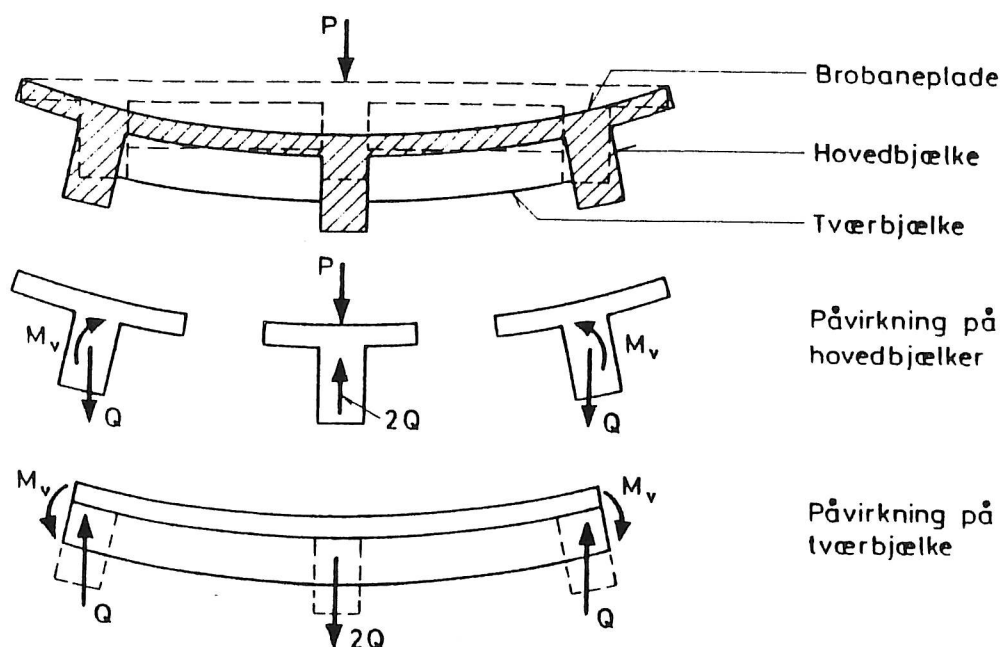


Fig. 1, Brodæk med koncentreret last.

På figuren er desuden antydnet, at hovedbjælkernes modstand mod vinkeldrejning om længdeaksen spiller en rolle.

Hvis tværbjælkens deformationer er meget små sammenlignet med hovedbjælkernes deformationer, vil de 3 hovedbjælker få næsten samme lodrette flytning, og lasten  $P$  vil fordeles ligeligt imellem dem. Stor vridningsstivhed af hovedbjælkerne ses også at forbedre lastfordelingen, idet momenterne  $M_v$  (fig. 1) jo bidrager til at formindske tværbjælkens maksimale flytningsdifferens (forskellen mellem flytning af midtpunkt og ender).

Af figuren ses endelig, at pladen ud over sin primære funktion - at føre en last anbragt uden for bjælkerne over til disse - i tillæg til de på side 1 beskrevne ekstra påvirkninger skal fungere som overflange for både hovedbjælker og tværbjælke. På fig. 2-7 er vist nogle eksempler på typiske brotværnsnit.

#### Formålet med opstilling af tilnærmede beregningsmetoder

Med de EDB-baserede beregningsmetoder, der idag står til rådighed, er det muligt at foretage en samlet analyse af brodæk-

ket som en rumlig konstruktion, såfremt man råder over tilstrækkelig regnekapacitet. Ved opdeling af beregningerne i en pladeanalyse og en bjælkeanalyse er der imidlertid mulighed for at anvende mindre omfattende standardprogrammer, og dette bliver da også ofte gjort i praksis. Forudsætningerne for at anvende et program til beregning af et plant bjælke- eller rammesystem er da, at man har tilstrækkeligt gode metoder til at vurdere lastfordelingen mellem hovedbjælkerne. Sådanne metoder kan f.eks. baseres på omfattende EDB-beregninger, der udgøres en gang for alle, se [1].

Da et brodæk normalt er mange gange statistisk ubestemt, er det desuden nødvendigt at råde over tilnærmelsesmetoder til et overslag over dimensionerne, der jo udgør en del af input'et til en EDB-beregning.

Endelig vil et godt overblik over lastfordelingen, støttet til overslagsmæssige beregninger, være et værdifuldt middel ved valg af brodækkets opbygning, dvs. antal hoved- og tværbjælker samt disses placering og udformning.

Lasten på et brodæk består dels af jævnt fordelte laster, dels af punktlaster. For korte brospænd udgør punktlasterne den væsentligste påvirkning, og det har derfor stor betydning for broens dimensioner at kende lastfordelingen rimeligt nøjagtigt. For lange brospænd bliver egenvægten dominerende. Her er det til gengæld let at etablere en god tværfordeling af trafiklasterne (lille forhold B:L, jfr. side 7).

EKSEMPLER PÅ BROTVÆRSNIT

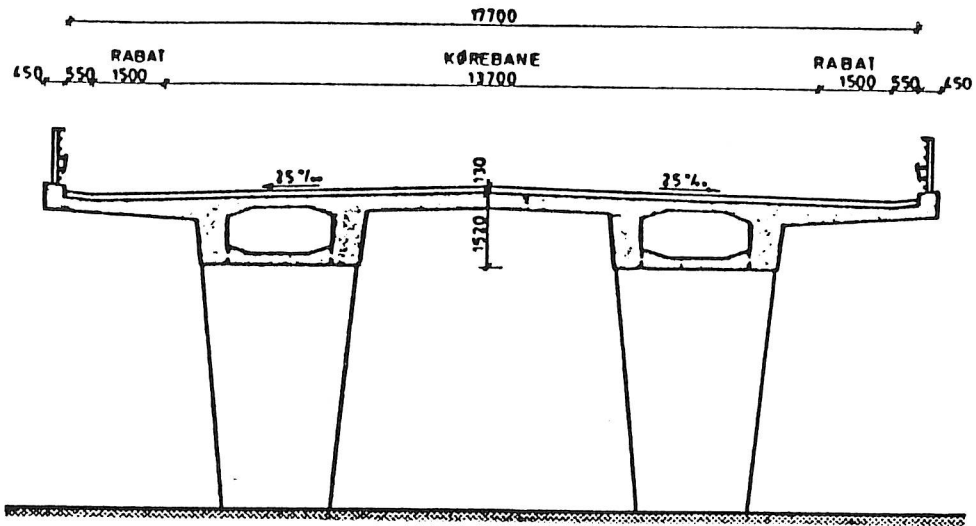


Fig. 2. Motorvejs-viadukt ved Odense. (Axel Nielsen A/S).

CROSS SECTION

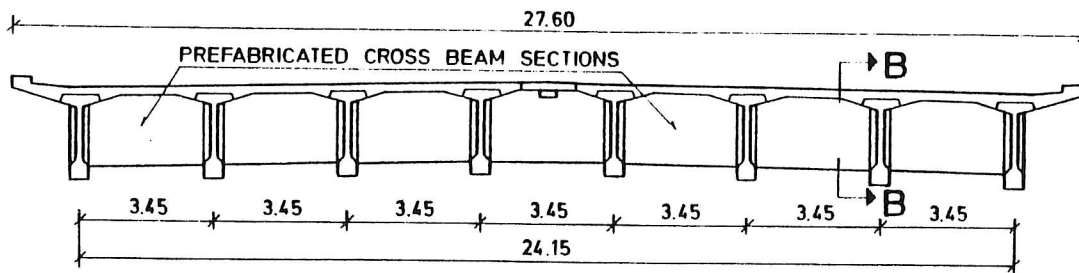


Fig. 3. Motorvejsbro over Lillebælt, viaduktfag. [2].

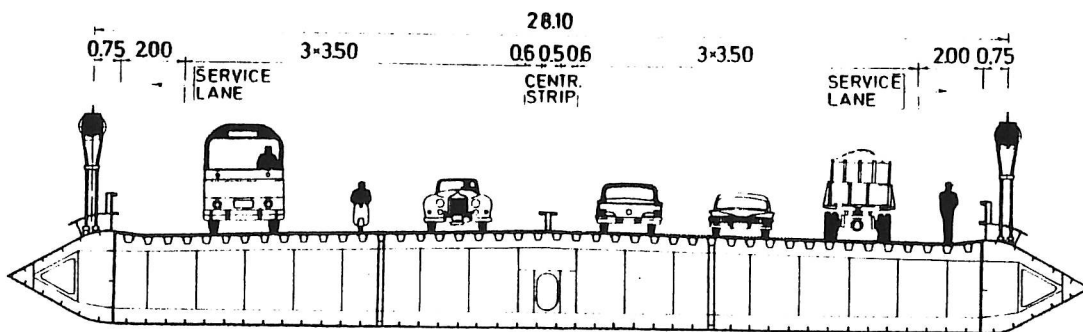


Fig. 4. Motorvejsbro over Lillebælt, hængebrofag. [2].

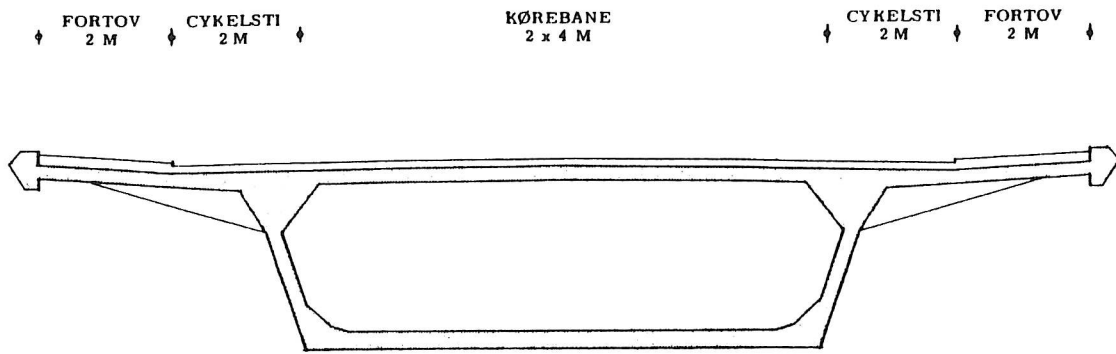


Fig. 5. Sallingsundbroen. [3].

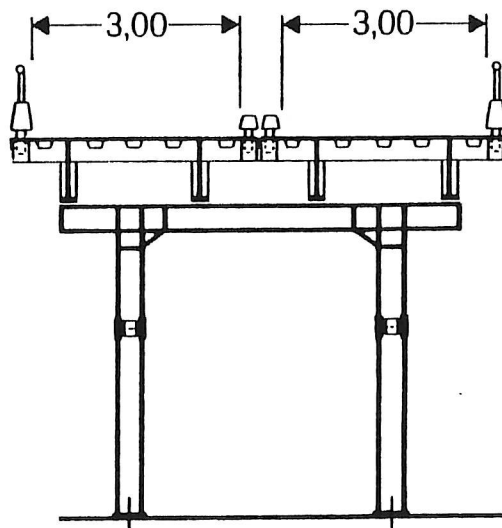


Fig. 6. Højvej i München. [4].

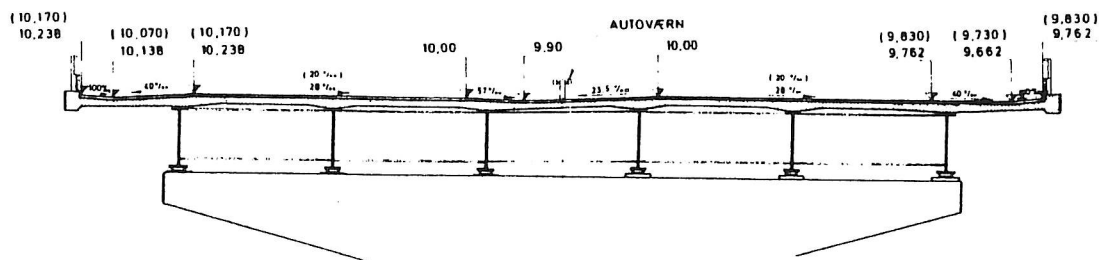


Fig. 7. Bro over Hylkedalen. (Chr. Ostenfeld & W. Jønsen).

### RISTEVÆRK AF BJÆLKER UDEN VRIDNINGSSTIVHED

For brodæk opbygget af I- eller T-bjælker, se f.eks. fig. 3, 6 og 7, kan man som regel uden mærkbare fejl se bort fra bjælkerens vridningsstivhed. Dette er iflg. [5] tilfældet, når

$$I_V < \frac{1}{200} \cdot \sqrt{\frac{a}{\lambda}} I_T I_L$$

hvor  $I_V$  er hovedbjælkerens vridningsinertimoment

$I_L$  - - - - - bøjningsinertimoment

$I_T$  - tværbjælkerens - - - - -

$a$  - afstanden mellem hovedbjælkerne

$\lambda$  - - - - - tværbjælkerne

(Er der kun én tværbjælke i et brofag - sædvanligvis anbragt ved fagmidten - sættes  $\lambda$  = halvdelen af fagets spændvidde).

#### A. Risteværk med stive tværbjælker

For smalle broer (lille forhold mellem bredde og faglængde) vil det ofte forekomme, at tværbjælkerne med god tilnærmelse (fejl ca. 10%<sup>\*)</sup> kan regnes uendeligt stive, dvs. tværbjælkerens deformation kan negligeres.

Dette kan iflg. [5] regnes at gælde, når

$$\frac{I_T}{I_L} > 1,3 \cdot (n-2) \cdot \left(\frac{B}{L}\right)^3 \quad (1)$$

Her er  $B$  = broens bredde mellem yderbjælkerne

$L$  = hovedbjælkerens faglængde

$n$  = antal hovedbjælker.

Ovenstående gælder for simpelt understøttede hovedbjælker. Indspændte eller kontinuerlige hovedbjælker vil være stivere og dermed stille større krav til tværbjælkerens stivhed. Dette tages der hensyn til ved at indsætte en ækvivalent faglængde  $L_e$  i stedet for  $L$  i henhold til nedenstående figur:

---

<sup>\*)</sup> Se nærmere herom side 25-28.

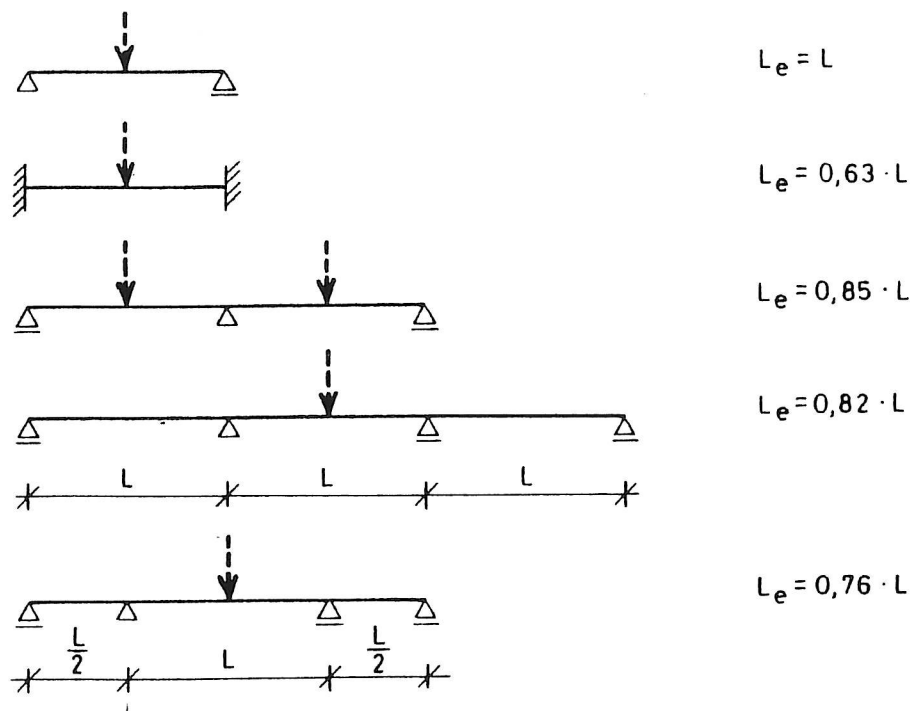


Fig. 8. Ækvivalente faglængder.

Udtrykket (1) kan også skrives som et krav til forholdet  $\frac{B}{L}$ , når forholdet  $\frac{I_T}{I_L}$  er valgt:

$$\frac{B}{L} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{1,3 \cdot (n-2)} \cdot \frac{I_T}{I_L}}$$

#### Risteværk med konstant bjælkeafstand og -stivhed

For et symmetrisk risteværk, hvilket er det almindeligst forekommende, sker vurderingen af lastfordelingen enklest ved opdeling af lasten i en symmetrisk og en antimetrisk del, se fig. 9.

For den symmetriske last vil alle  $n$  hovedbjælker få samme nedbøjning, når tværbjælken er  $\infty$  stiv. Hvis hovedbjælkerne er ens, vil de da optage samme last, dvs. lasten  $2 \cdot \frac{P}{2}$  fordeles med  $P_i' = \frac{1}{n} \cdot P$  til hver.



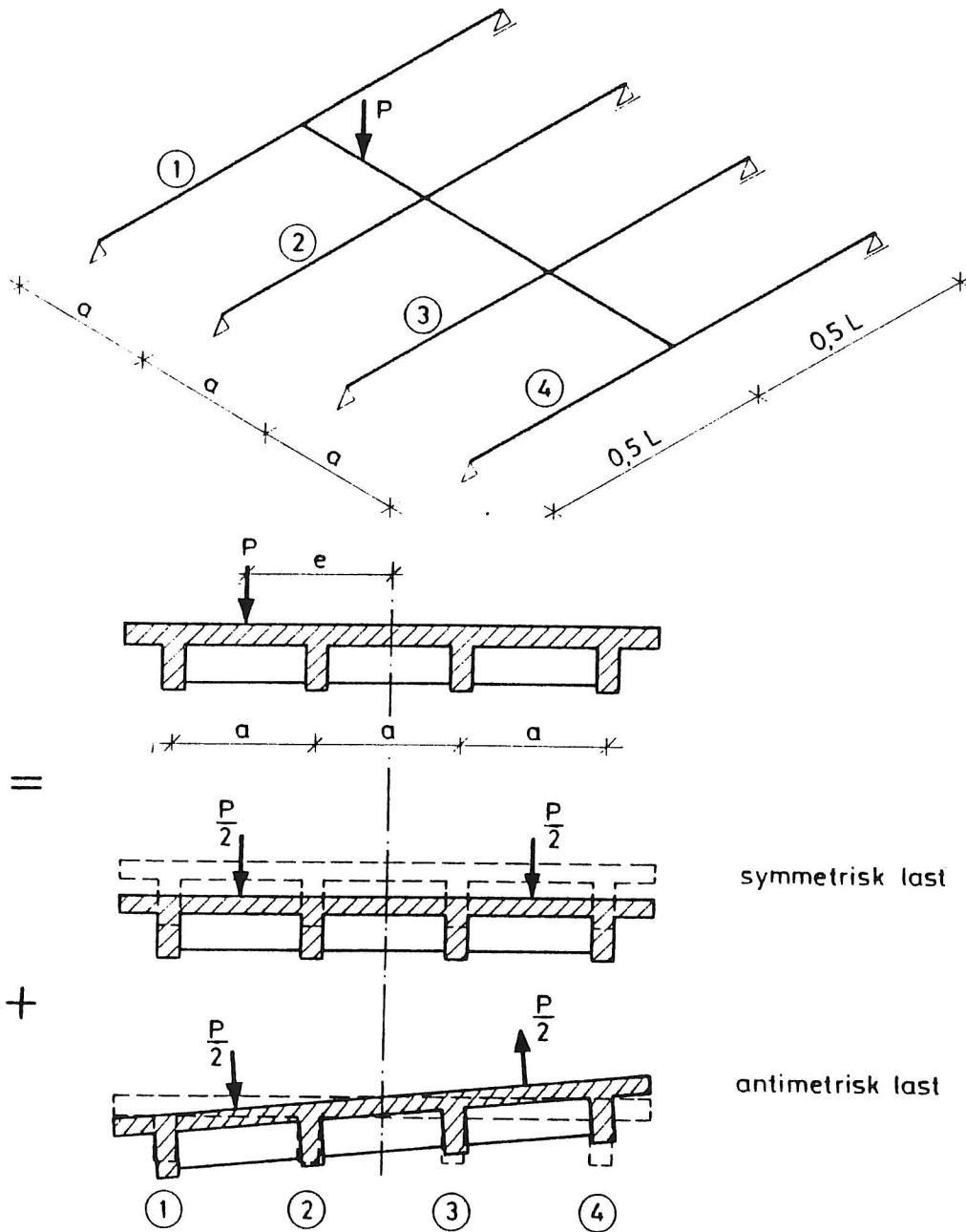


Fig. 9. Risteværk med stive tværbjælker.

For den antimetriske last vil virkningen være en rotation af risteværket om symmetrilinien. Herved får den enkelte hovedbjælke en lodret flytning, der er proportional med bjælkens afstand  $x_i$  fra symmetrilinien. Det samme må da gælde for den last  $P_i''$ , som den enkelte hovedbjælke påføres, altså  $P_i'' = K \cdot x_i$ . Bidraget til optagelse af ekscentricitetsmomentet  $P \cdot e$  fra en

bjælke i afstanden  $x_i$  fra symmetrilinien bliver  $K \cdot x_i^2$ . Konstanten  $k$  findes ved at udtrykke, at summationen af bidragene skal være lig med  $P \cdot e$ , dvs.

$$\sum_1^n K \cdot x_i^2 = P \cdot e \Rightarrow K = \frac{P \cdot e}{\sum_1^n x_i^2}$$

For et risteværk med 4 ens hoveddragere som vist på fig. 9 fås

$$\sum_1^n x_i^2 = 2 \left( \left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right) = 5a^2$$

Den samlede påvirkning  $P_i$  på hver enkelt hoveddrager bliver da

$$P_1 = \frac{1}{4} \cdot P + \frac{P \cdot e}{5a^2} \cdot \frac{3}{2}a = P \cdot (0,25 + 0,30 \cdot \frac{e}{a})$$

$$P_2 = \frac{1}{4} \cdot P + \frac{P \cdot e}{5a^2} \cdot \frac{a}{2} = P \cdot (0,25 + 0,10 \cdot \frac{e}{a})$$

$$P_3 = P \cdot (0,25 - 0,10 \cdot \frac{e}{a})$$

$$P_4 = P \cdot (0,25 - 0,30 \cdot \frac{e}{a})$$

Hvis lasten placeres over en af yderbjælkerne, fås

$$e = \frac{3}{2}a \text{ og}$$

$$P_1 = 0,70 \cdot P$$

$$P_2 = 0,40 \cdot P$$

$$P_3 = 0,10 \cdot P$$

$$P_4 = -0,20 \cdot P$$

Dette er illustreret på fig. 10, der også viser momentkurven for tværbjælken.

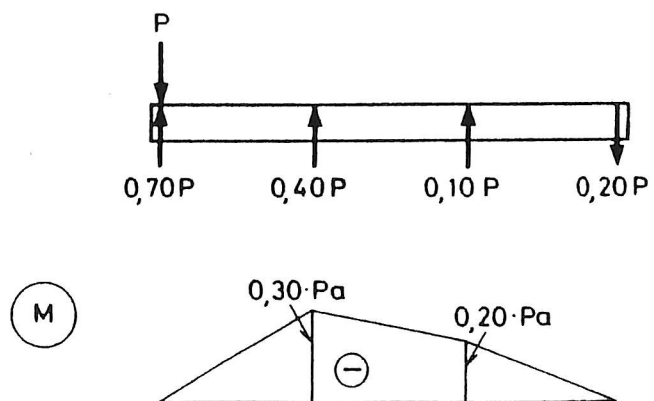


Fig. 10. Tværbjælkens påvirkninger.

Bemærk analogien mellem beregning af den enkelte hovedbjælkes lastandel efter formlen

$$P_i = \frac{1}{n} P + \frac{P \cdot e}{\sum_1^n x_i^2} \cdot x_i \quad (2)$$

og spændingsberegning efter Navier's formel!

Af ovenstående beregninger ses det, at den hårdest belastede bjælke skal dimensioneres for lasten  $0,70 P$ . Hvis tværbjælakens fordelende virkning ikke var taget i regning, skulle der dimensioneres for  $1,00 \cdot P$ .

Resultatet af tilsvarende beregninger for risteværker med fra 2 til 6 ens hovedbjælker ses af figur 11. Figuren viser påvirkningen på tværbjælken.

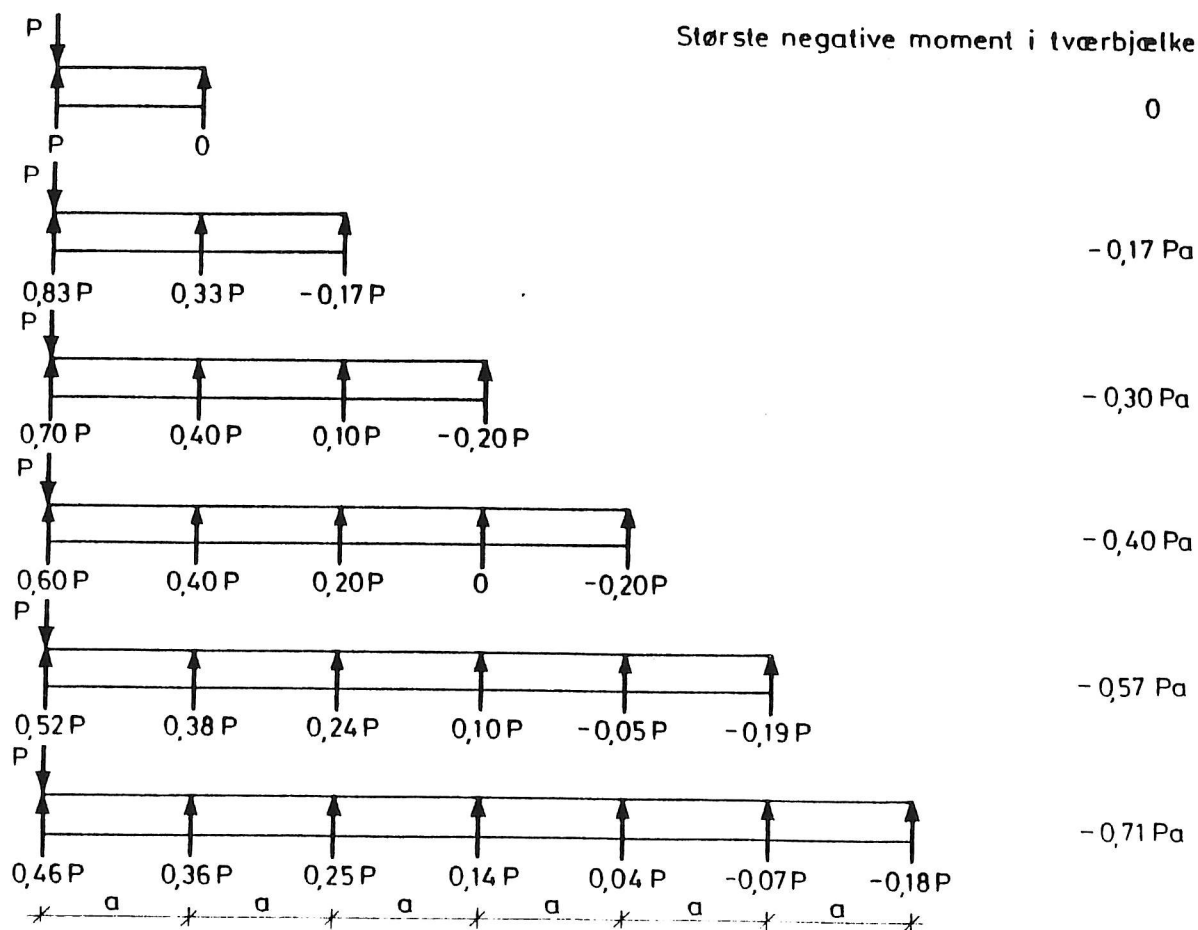


Fig. 11. Lastfordeling i risteværk med 2, 3, 4, 5 og 6 hovedbjælker.

Ved opstilling af den ydre last midt på tværbjælken fås ligelig fordeling af lasten på hovedbjælkerne, men større momenter i tværbjælkerne. Disse bliver

$n = 2$	$M_T = 0$
$n = 3$	$M_T = 0,33 \cdot Pa$
$n = 4$	$M_T = 0,50 \cdot Pa$
$n = 5$	$M_T = 0,75 \cdot Pa$
$n = 6$	$M_T = 0,86 \cdot Pa$

Bemærk, at medens største last på en hovedbjælke falder med voksende  $n$ , så stiger det moment, som tværbjælken skal dimensioneres for.

Da den ydre lasts placering kan variere, har det interesse at kende influenslinien for virkningen på hver enkelt bjælke. For  $n = 4$  har de følgende udseende, se fig. 12.

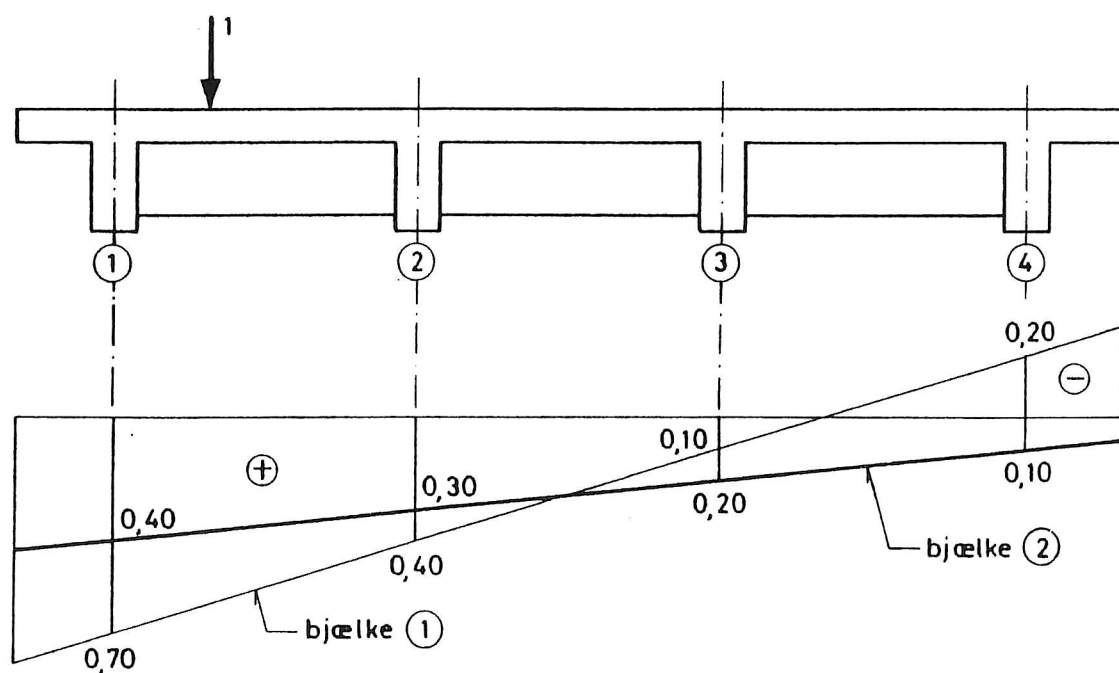


Fig. 12. Influenslinier for påvirkning på hovedbjælker.

Ifølge Maxwell's sætning, se f.eks. [6] side 280, fås influens-

linien for nedbøjningen i et punkt af en bjælke som nedbøjningslinien for en kraft 1 anbragt i punktet. Flytningen af tværbjælken ved en hovedbjælke er proportional med en påvirkning, der optages af hovedbjælken, og den søgte influenslinie vil derfor være affin med nedbøjningslinien for tværbjælken. Da tværbjælken er forudsat at være uendeligt stiv, vil influenslinien altså være en ret linie.

Også for laster placeret uden for yderbjælkerne kan lastfordelingen bestemmes ved hjælp af influenslinierne. Disse skal blot forlænges ud over punkterne ① og ④ som vist på fig. 12. Dette følger umiddelbart af den ovenfor beskrevne betragtningssmåde: En udkrægning på tværbjælken vil, uanset udkrægnings stivhed, få en nedbøjning efter tangenten til tværbjælkenes nedbøjningslinie i punkt ① henholdsvis ④.

Ovenstående resultater kan naturligvis også fås ved at udtrykke de enkelte hovedbjælkers lastandele,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  hhv.  $P_4$ , som funktioner af ekscentriciteten  $e$ . Den lineære sammenhæng fremgår af udtrykkene midt på side 9.

#### Symmetrisk risteværk med varierende bjælkestivhed

Som det fremgår af forrige afsnit, vil påvirkningen fra den mest ugunstige lastopstilling ikke være lige stor for alle hovedbjælker. Det kan derfor forekomme, at hovedbjælkerne udføres med indbyrdes forskellige dimensioner og dermed forskellige stivheder. F.eks. vil yderbjælkerne ofte udføres med større stivhed end de øvrige bjælker.

For et symmetrisk risteværk, hvor symmetrisk anbragte bjælker har samme stivhed, kan der let opstilles et udtryk svarende til formel (2).

Den last, der optages af den  $i$ 'te bjælke svarende til lastsituationen i fig. 13, bliver

$$P_i = \frac{P}{\sum_1^n \alpha_i} \cdot \alpha_i + \frac{P \cdot e}{\sum_1^n (\alpha_i x_i^2)} \cdot \alpha_i x_i \quad (3)$$

Taleksempel 1: Med yderbjælker dobbelt så stive som øvrige

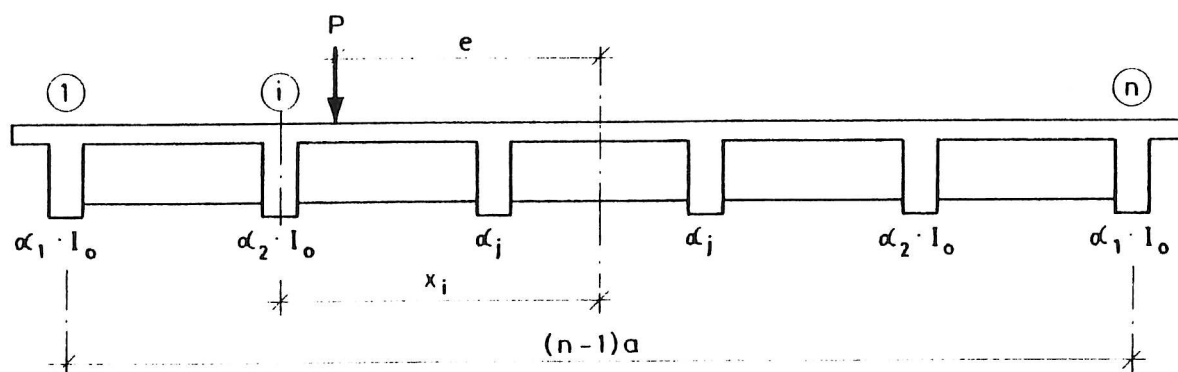


Fig. 13. Symmetrisk risteværk med parvis ens bjælker.

bjælker, dvs.  $\alpha_1 = 2$  og øvrige  $\alpha = 1$ , fås med lasten  $P$  placeret over en yderbjælke flg. resultater:

$$\begin{aligned} \underline{n = 3} \quad \sum \alpha_i &= 2 + 1 + 2 = 5 \\ \sum \alpha_i x_i^2 &= 2 \cdot a^2 + 0 + 2 \cdot a^2 = 4a^2 \\ e = a \Rightarrow \underline{P_1} &= \frac{P}{5} \cdot 2 + \frac{P \cdot a}{4a^2} \cdot 2a = \underline{0,90 P} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{n = 4} \quad \sum \alpha_i &= 2 + 1 + 1 + 2 = 6 \\ \sum \alpha_i x_i^2 &= (2 \cdot (1,5a)^2 + 1 \cdot (0,5a)^2) \cdot 2 = 9,5a^2 \\ e = 1,5a \Rightarrow \underline{P_1} &= \frac{P}{6} \cdot 2 + \frac{P \cdot 1,5a}{9,5a^2} \cdot 2 \cdot 1,5a = \underline{0,81 P} \end{aligned}$$

Tilsvarende fås:

$$\underline{n = 5} \quad e = 2a \Rightarrow \underline{P_1 = 0,73 P}$$

$$\underline{n = 6} \quad e = 2,5a \Rightarrow \underline{P_1 = 0,67 P}$$

$$\underline{n = 7} \quad e = 3a \Rightarrow \underline{P_1 = 0,61 P}$$

Bemærk, at den direkte belastede yderbjælkes lastandel  $P_1$  er forøget i forhold til risteværket med lige stive bjælker (fig. 11). Til gengæld aflastes mellembjælkerne, hvilket man let kan overbevise sig om.

### Ikke-symmetrisk risteværk

Selv om risteværket ikke er symmetrisk, men hovedbjælkerne er placeret med varierende indbyrdes afstand, og deres stivheder eventuelt heller ikke er ens, kan lastfordelingen beregnes efter de samme principper, som er benyttet i de foregående afsnit.

Tværbjælkens flytning deles i en translation og en rotation

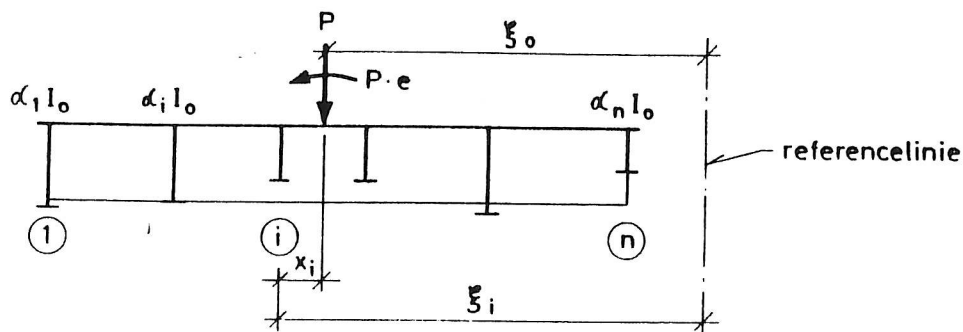


Fig. 14. Ikke-symmetrisk risteværk.

a) Ren translation: alle bjælker får nedbøjning  $y_0$

$$P'_i = k_1 y_0 \cdot I_i = k_1 y_0 \alpha_i I_0$$

Resultanten  $\sum_1^n P'_i$  skal være lig den ydre last

$$\Rightarrow k_1 = \frac{P}{y_0 I_0 \cdot \sum_1^n \alpha_i} \quad \text{og} \quad P'_i = \frac{P}{\sum_1^n \alpha_i} \cdot \alpha_i$$

Resultantens afstand  $\xi_0$  fra en referencelinie, f.eks. en af yderbjælkerne, bestemmes af

$$\xi_0 = \frac{\sum (\alpha_i I_0 \cdot \xi_i)}{\sum (\alpha_i I_0)} = \frac{\sum (\alpha_i \xi_i)}{\sum \alpha_i}$$

b) Rotation: tværbjælken roterer vinklen  $\theta$  om en akse i højde med tyngdepunktslinien ved  $\xi = \xi_0$

$$P_i'' = k_1 \cdot y_i \cdot I_i = k_1 \theta \alpha_i x_i$$

Kraftens moment om nævnte akse

$$M_i'' = P_i'' \cdot x_i = k_1 \theta \alpha_i x_i^2$$

$$\text{Resultant } \sum_1^n P_i'' = k_1 \theta \cdot \sum_1^n \alpha_i x_i^2 = 0$$

$$\text{Resulterende moment } \sum_1^n M_i'' = \sum_1^n k_1 \theta \alpha_i x_i^2 = P \cdot e$$

$$\Rightarrow k_1 \theta = \frac{Pe}{\sum_1^n \alpha_i x_i^2}$$

Den samlede virkning på den i'te bjælke bliver

$$P_i = \frac{P \alpha_i}{\sum_1^n \alpha_i} + \frac{Pe}{\sum_1^n \alpha_i x_i^2} \cdot \alpha_i x_i \quad (4)$$

Dette udtryk er identisk med (3).

#### Fremgangsmåde, hvis lasten ikke virker på en tværbjælke

I det generelle tilfælde, hvor lasten ikke er placeret på en tværbjælke, tænkes konstruktionens flytninger og snitkræfter fremkommet i flere etaper, hvis virkninger adderes. Etaperne - eller konstruktionens lasthistorie om man vil - vælges så overskuelige som muligt.

For den lastsituation, der er vist på fig. 15, vælges følgende opdeling:

- 1) Lasten overføres til hovedbjælkerne, som regnes at udgøre ueftergivelige understøtninger for pladen. Sædvanligvis kan dette gøres ved at betragte en pladestrimmel med en passende bredde, se f.eks. [7].



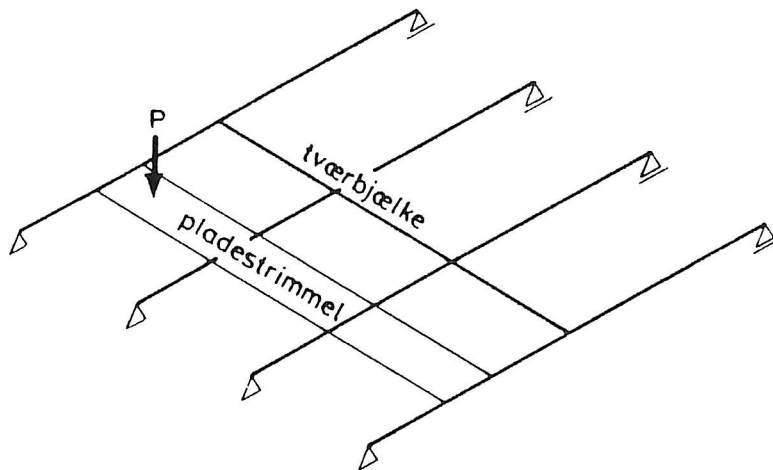


Fig. 15. Lastplacering uden for bjælkerne.

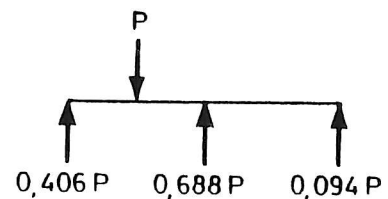
- 2) Hovedbjælkerne regnes ueftergiveligt understøttet ved tværbjælken/tværbjælkerne og belastes med kræfter lig med og modsat rettet pladestrimlens reaktioner.
- 3) De tænkte understøtninger ved tværbjælkerne fjernes, og risteværket belastes med kræfter lig med og modsat rettet reaktionerne ved tværbjælkerne. Denne opgave løses som beskrevet tidligere i dette afsnit.

Til sidst adderes virkningerne.

Det bemærkes, at pladens medvirken til lastfordelingen er negligeret, jfr. bemærkningerne side 1.

Taleksempel 2 (se fig. 17):

- 1) Reaktionsfordelingen ved lastens overføring til hovedbjælkerne fås på sædvanlig måde, f.eks. ved opslag i et af de gængse tabelværker. Resultatet er vist på fig. 16.



- 2) Hovedbjælkerne belastes med kræfterne  $0,406 P$  og  $0,688 P$  nedad samt  $0,094 P$  opad. Alle hovedbjæl-

Fig. 16. Fordeling af last gennem plade.

ker forsynes med en midlertidig understøtning ved tværbjælken.

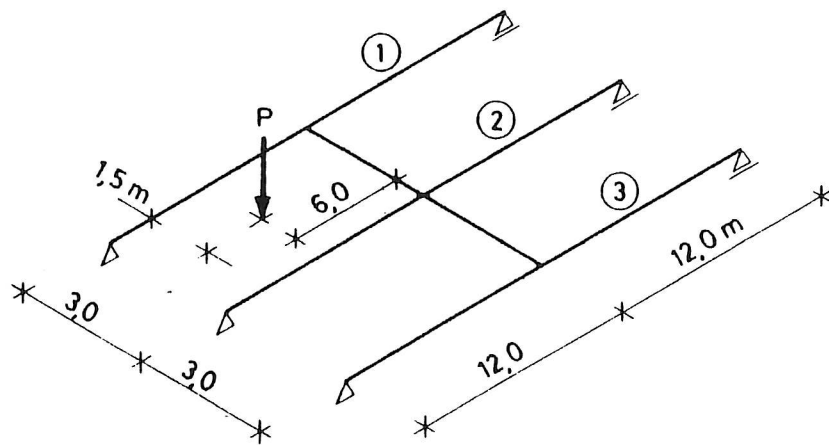


Fig. 17. Risteværk med last uden for bjælkerne.

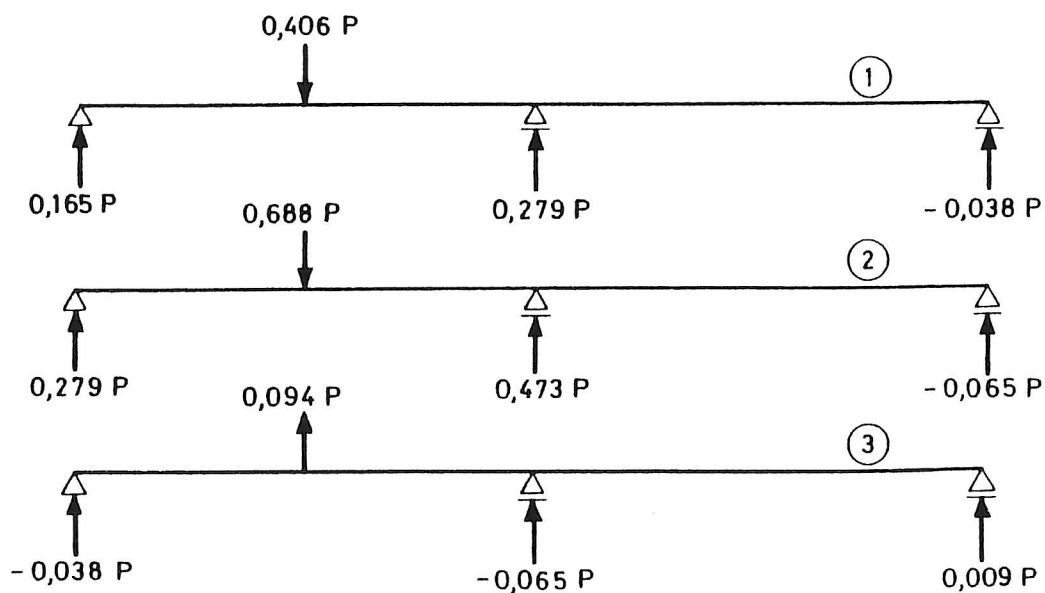


Fig. 18. Hovedbjælker med ekstra understøtning.

3) Risteværket belastes med kræfterne  $0,279 P$  og  $0,473 P$  nedad samt  $0,065 P$  opad, se fig. 19.

Påvirkningen på hovedbjælkerne fås ved benyttelse af resultatet på fig. 11.

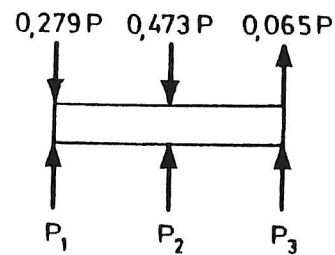


Fig. 19. Last på tværbjælke.

$$P_1 = P (0,279 \cdot 0,83 + 0,473 \cdot 0,33 + 0,065 \cdot 0,17) = 0,399 P$$

$$P_2 = P (0,279 + 0,473 - 0,065) = 0,227 P$$

$$P_3 = P (-0,279 \cdot 0,17 + 0,473 \cdot 0,33 - 0,065 \cdot 0,83) = 0,055 P$$

De resulterende momenter findes ved addition af momenterne for etape 2, og 3. De kan dog også findes ud fra den resulterende last for hver enkelt bjælke, se fig. 20.

Som kontrol kan benyttes, at summen af de 3 bjælkers momentkurver skal være lig momentkurven for en bjælke med længde 24 m og last  $P$  6,0 m fra den ene ende. (Kontrollen stemmer ikke helt, hvilket skyldes diverse afrundinger).

#### Flere tværbjælker i hvert brofag

I reglen vælges kun 1, 2 eller 3 tværbjælker pr. fag af hovedbjælkerne, idet anordning af tværbjælker besværliggør udførelsen af brodækket.

Fremgangsmåden ved beregning af risteværker med 2 eller flere tværbjælker pr. fag er den samme, som når der kun er én tværbjælke, dvs.

- 1) lasterne fordeles via pladen til hovedbjælkerne;
- 2) hovedbjælkerne fordeler lasterne ud til krydsningspunkterne mellem hoved- og tværbjælker, der regnes midlertidigt understøttet i disse punkter;
- 3) de midlertidige understøtninger fjernes, og laster i nævnte krydsningspunkter fordeles gennem risteværket.

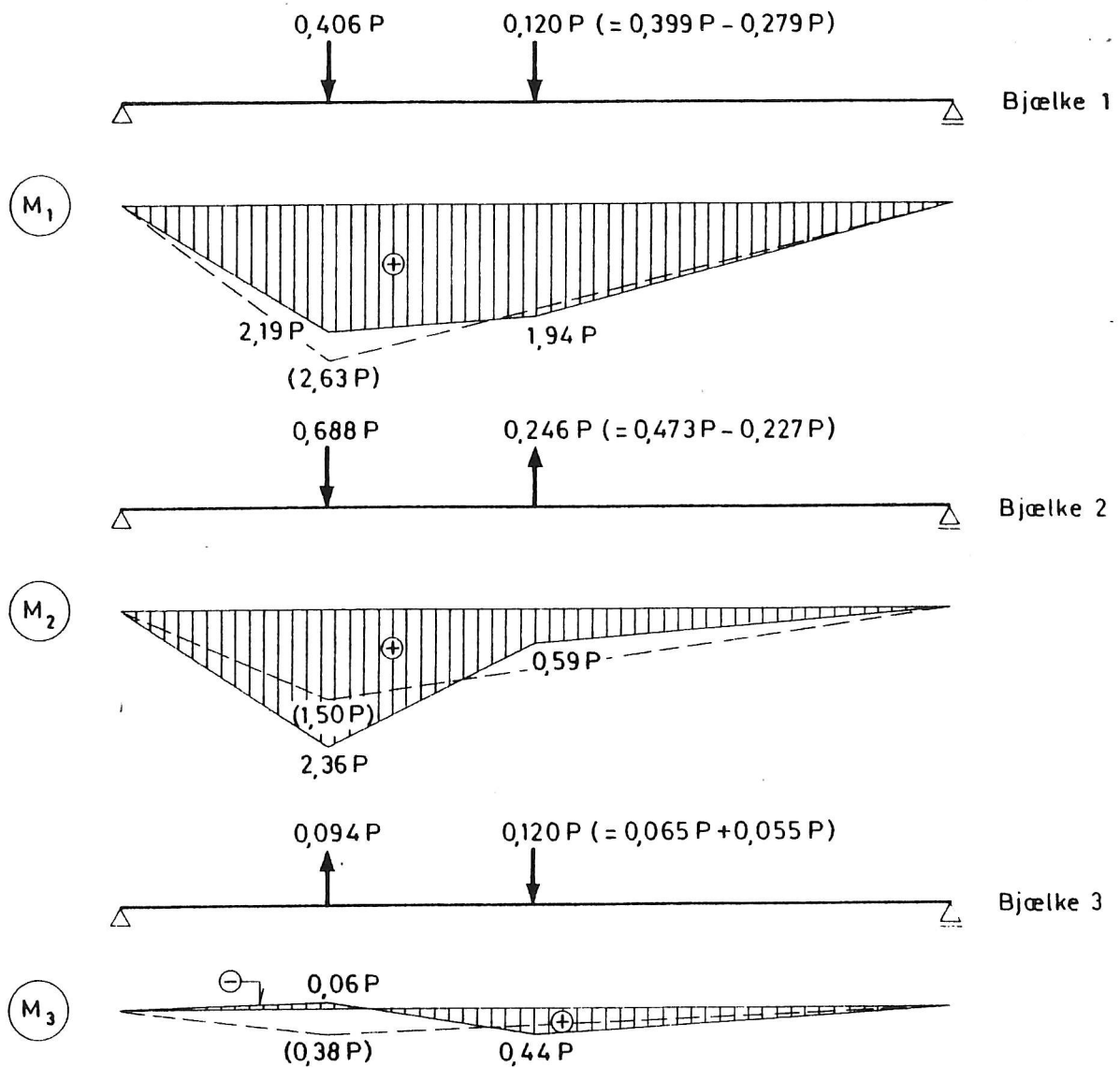


Fig. 20. Hovedbjælkernes resulterende laster og momenter.  
(Punkteret linie gælder, når der er en tværbjælke under den ydre punktlast - tal i parentes).

Når tværbjælkerne er  $\infty$  stive, kan lastfordelingen i risteværket bestemmes ved at tage hver tværbjælke og dens laster for sig, som om der kun fandtes denne ene tværbjælke. Betragtes nemlig et sådant risteværk, se fig. 21, vil den belastede tværbjælke tvinge hovedbjælkerne til at få nedbøjninger, der varierer lineært langs tværbjælken. Da alle hovedbjælkerne er påvirket af en enkeltkraft, vil deres nedbøjningslinier være

affine, og nedbøjningen vil da i et vilkårligt tværsnit i risteværket variere lineært. Dette gælder også ved de øvrige, ubelastede tværbjælker, der således ikke udøver nogen tvang (= lastfordeling) på systemet.

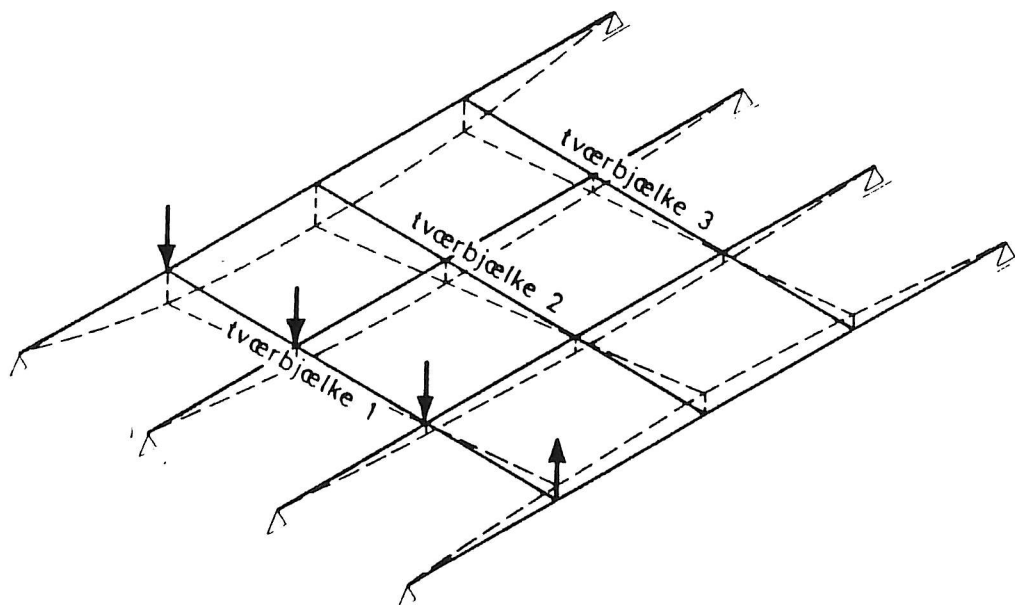


Fig. 21. Risteværk med flere tværbjælker.

På fig. 20 er med punkteret linie vist momentkurverne for bjælkerne i risteværket i fig. 16 (taleksempel 2), når der tilføjes en tværbjælke 6,0 m fra de første understøtninger, dvs. ved den ydre last.

Endelig er på fig. 22 vist influenslinierne for momentet i nogle karakteristiske punkter af et risteværk med 0, 1 eller 3 tværbjælker i et fag. Lasten forudsættes placeret over den ene yderbjælke.

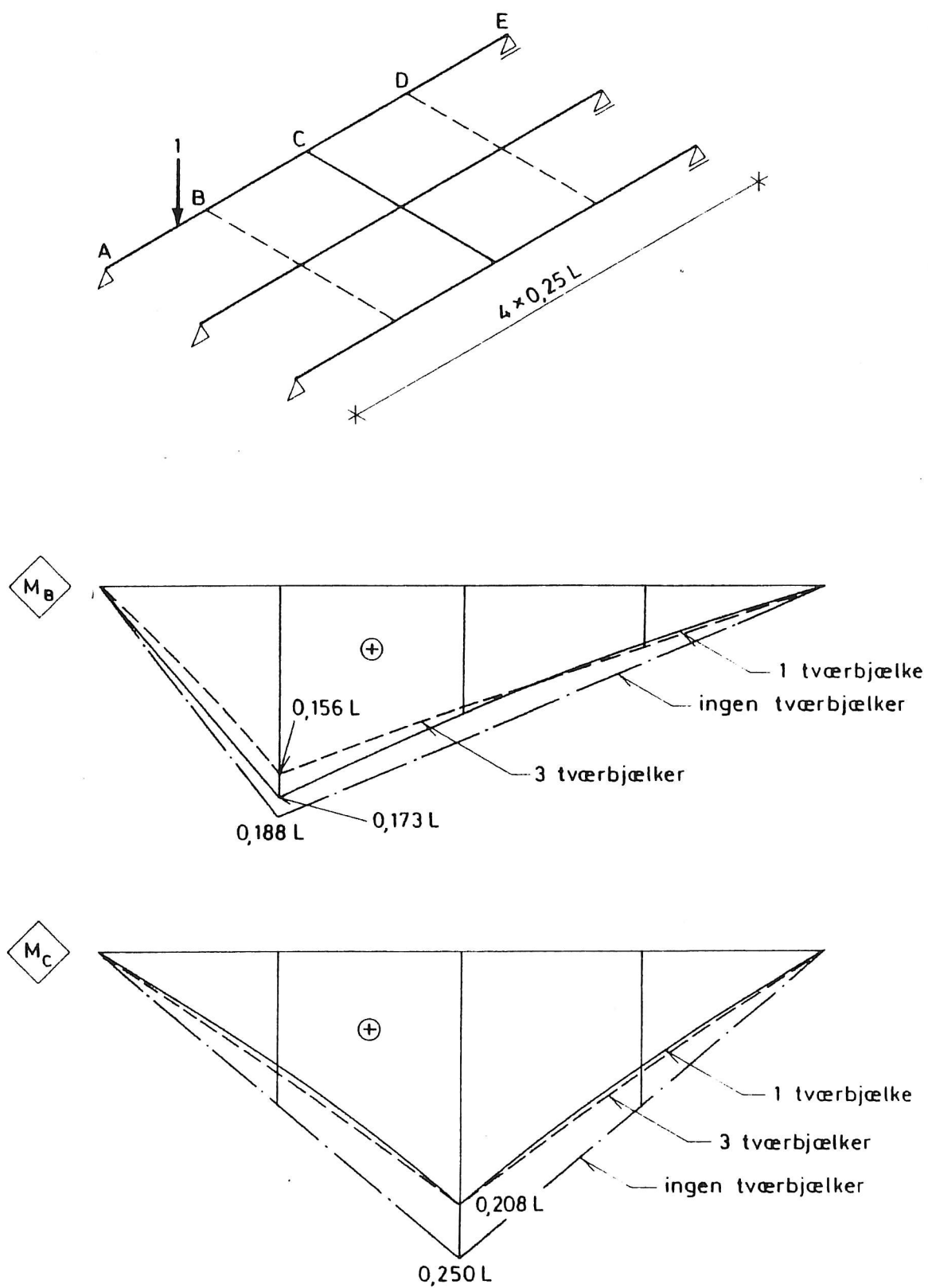


Fig. 22. Influenslinier for moment i randbjælke i risteværk med 0, 1 eller 3 ueftergivelige tværbjælker.

### B. Risteværk med eftergivelige tværbjælker

Når kriteriet (1) ikke er opfyldt, må der ved beregningen af lastfordelingen tages hensyn til tværbjælkernes deformationer. Dette resulterer i en dårligere lastfordeling, dvs. hovedbjælkerne skal dimensioneres for større påvirkninger, end når tværbjælkerne er  $\infty$  stive. Til gengæld bliver momenterne i tværbjælken mindre.

Også her består grundproblemet i at studere lastfordelingen, når lasten virker på en tværbjælke. I denne situation betragtes tværbjælken som en bjælke på elastiske understøtninger. Disse udgøres af hovedbjælkerne.

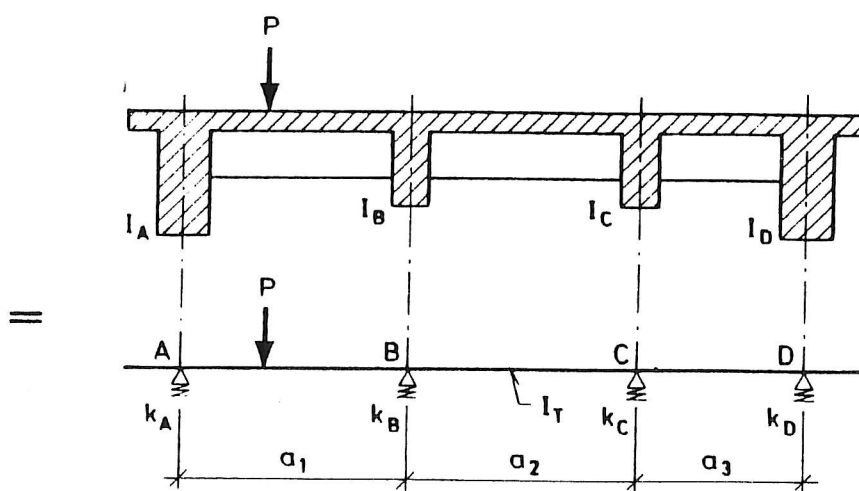


Fig. 23. Tværbjælke på elastiske understøtninger.

Understøtningernes, dvs. hovedbjælkernes, fjedring beskrives med fjederkonstanterne  $k_A \dots k_D$ , der defineres som den kraft, der skal til for at give flytningen  $l$ . (Ofte ses tabeller, hvor der i stedet benyttes  $f = \frac{1}{k}$  dvs. flytningen for kraften  $l$ ).

For det simple, men hyppigt forekommende tilfælde, at bjælkerne er ækvidistante og har samme inertimoment og understøtningsforhold  $\Rightarrow$  samme fjederkonstanter, er en manuel beregning ved

hjælp af standarddiagrammer ofte gennemførlig, idet beregningerne i omfang og kompleksitet ikke adskiller sig væsentligt fra de beregninger, der er beskrevet i afsnit A.

I mere komplicerede tilfælde vil der kun undtagelsesvis være mulighed for at udnytte færdige resultater - et eksempel på dette beskrives senere -, i almindelighed må der opstilles en risteværksberegning "fra grunden", dvs. der må opstilles et ligningssystem, som udtrykker, at konstruktionen skal bevare sin sammenhæng, når hoved- og tværbjælker betragtes hver for sig påvirket af de ydre laster og de ubekendte kontaktkræfter mellem hoved- og tværbjælker.

#### Risteværk med konstant bjælkeafstand og -stivhed

Først betragtes et risteværk med kun én tværbjælke, se fig. 24. Afhængigt af hovedbjælkernes understøtningsforhold får fjederkonstanten  $k$ , defineret som anført på forrige side, de værdier, der er angivet i nedenstående tabel. Tværbjælken er herved regnet placeret ved fagmidten.

I det følgende gennemgås beregningsgangen svarende til et risteværk med 3 hovedbjælker, se fig. 24.

Tværbjælkens reaktioner beregnes ved først at udtrykke, at deres størrelse er proportional med flytningen i de pågældende punkter:

$$R_A = k \cdot y_A \quad R_B = k \cdot y_B \quad R_C = k \cdot y_C$$

Derefter opstilles ligevægtsligningerne

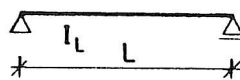
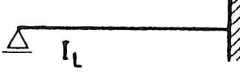
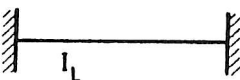
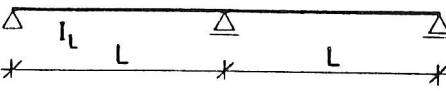
$$R_A + R_B + R_C = P \quad (\text{projektion})$$

$$(R_A - R_C) \cdot a = P \cdot e \quad (\text{moment})$$

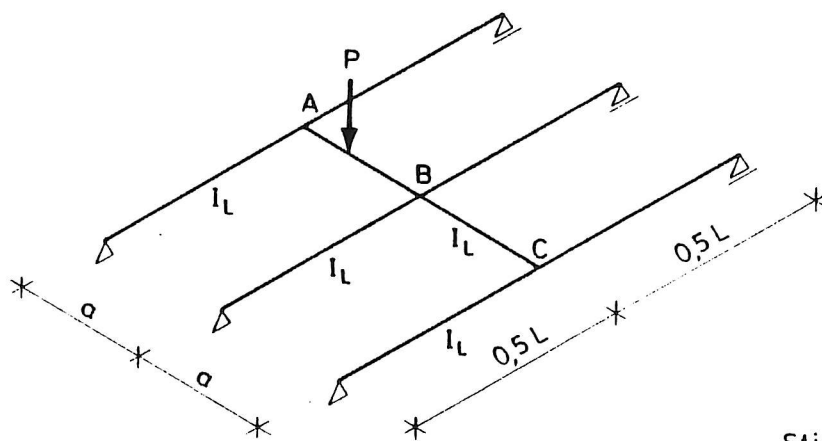
samt en ligning, der udtrykker, at flytningsdifferencen  $y_B - \frac{1}{2} \cdot (y_A + y_C)$  skal være lig med flytningen på midten af tværbjælken målt fra korden AC.

I beregningerne indføres stivhedstallet  $C = \frac{48EI_T}{ka^3}$  og resultaterne bliver



Hovedbjælkernes understøtningsforhold	Fjederkonstant k
	$\frac{48EI_L}{L^3}$
	$\frac{110EI_L}{L^3}$
	$\frac{192EI_L}{L^3}$
	$\frac{67EI_L}{L^3}^*)$

\*) Gælder når der kun er tværbjælke i det ene fag.



Stivhedstal:

$$C = \frac{48EI_T}{ka^3}$$

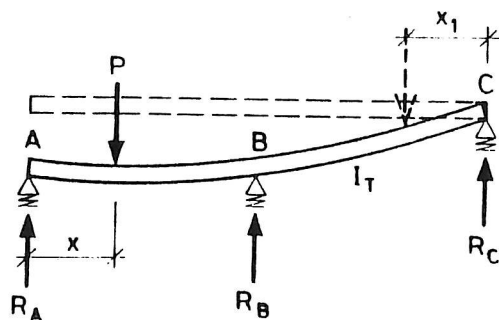


Fig. 24. Risteværk med eftergivelige understøtninger.

$$R_A = \frac{5C + 32 - (3C + 40) \frac{x}{a} + 8 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^3}{6C + 32} \cdot P \quad \text{for } 0 \leq x \leq a$$

$$R_A = \frac{-C + (3C - 8) \cdot \frac{x_1}{a} + 8 \cdot \left(\frac{x_1}{a}\right)^3}{6C + 32} \cdot P \quad \text{for } a \geq x_1 \geq 0$$

$$R_B = \frac{C + 24 \left(\frac{x}{a}\right) - 8 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^3}{3C + 16} \cdot P \quad \text{for } 0 \leq x \leq a$$

$$R_B = \frac{C + 24 \left(\frac{x_1}{a}\right) - 8 \cdot \left(\frac{x_1}{a}\right)^3}{3C + 16} \cdot P \quad \text{for } a \geq x_1 \geq 0$$

Disse udtryk kan benyttes til optegning af influenslinierne for reaktionerne  $R_A$ ,  $R_B$  og  $R_C$ . Sidstnævnte fås ved spejlvending af kurven for  $R_A$ . På fig. 25 og 26 er influenslinierne gengivet efter [8].

Tilsvarende beregninger kan opstilles for andre antal hovedbjælker; det afstås der dog fra her. Ud over de på fig. 25 og 26 viste influenslinier er tilsvarende diagrammer for 4, 5 og  $\infty$  mange ens, elastiske understøtninger gengivet i [8].

For laster placeret på eventuelle udkragninger ud over yderbjælkerne kan diagrammerne stadig benyttes, når blot influenslinierne forlænges i de respektive tangenters retninger. Dette følger af den betragtningsmåde, der er benyttet side 12.

Når lasten ikke virker på tværbjælken/tværbjælkerne, benyttes samme fremgangsmåde som tidligere beskrevet (side 15-18).

Det på side 6 angivne kriterium for, om en tværbjælke kan regnes  $\infty$  stiv, kan nu vurderes nærmere. Idet bredden  $B = (n-1) \cdot a$ , kan det omskrives til

$$\frac{I_T}{I_L} \cdot \left(\frac{L}{a}\right)^3 > 1,3 \cdot (n-2)(n-1)^3$$

For simpelt understøttede hovedbjælker er venstresiden lig med det side 23 definerede stivhedstal  $C$ . For forskellige antal hovedbjælker fås

$n = 3 \Rightarrow C > 10$

$n = 4 \Rightarrow C > 70$

$n = 5 \Rightarrow C > 170$

$n = 6 \Rightarrow C > 650$

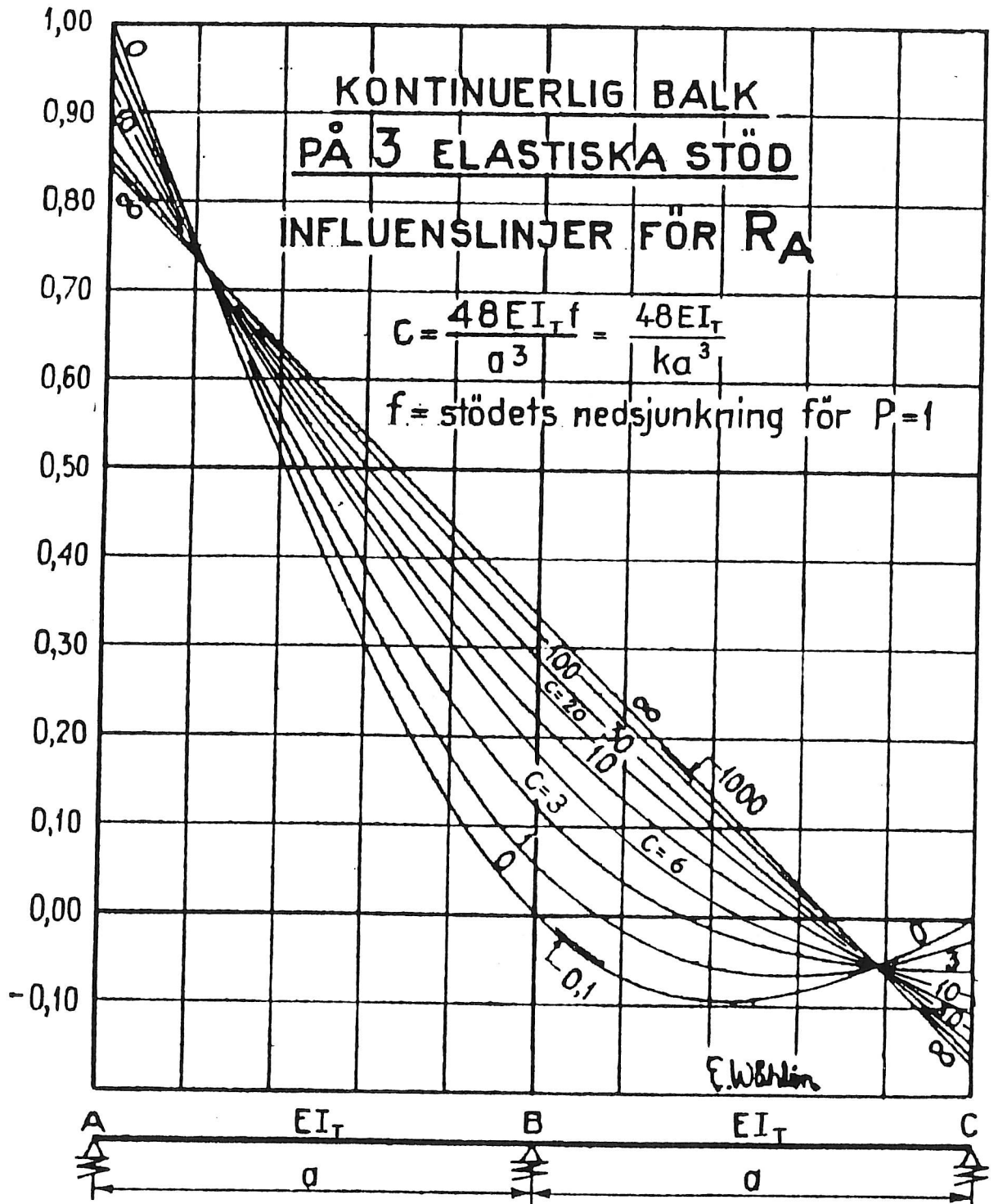


Fig. 25. Influenslinjer for  $R_A$ . Fra [8].

Eksempelvis fås med  $n = 3$  og  $C = 10$  af diagrammerne fig. 25 og 26 den på fig. 27 angivne lastfordeling. Til sammenligning er angivet fordelingen, når tværbjælken er uendeligt stiv, dvs.  $C = \infty$ .

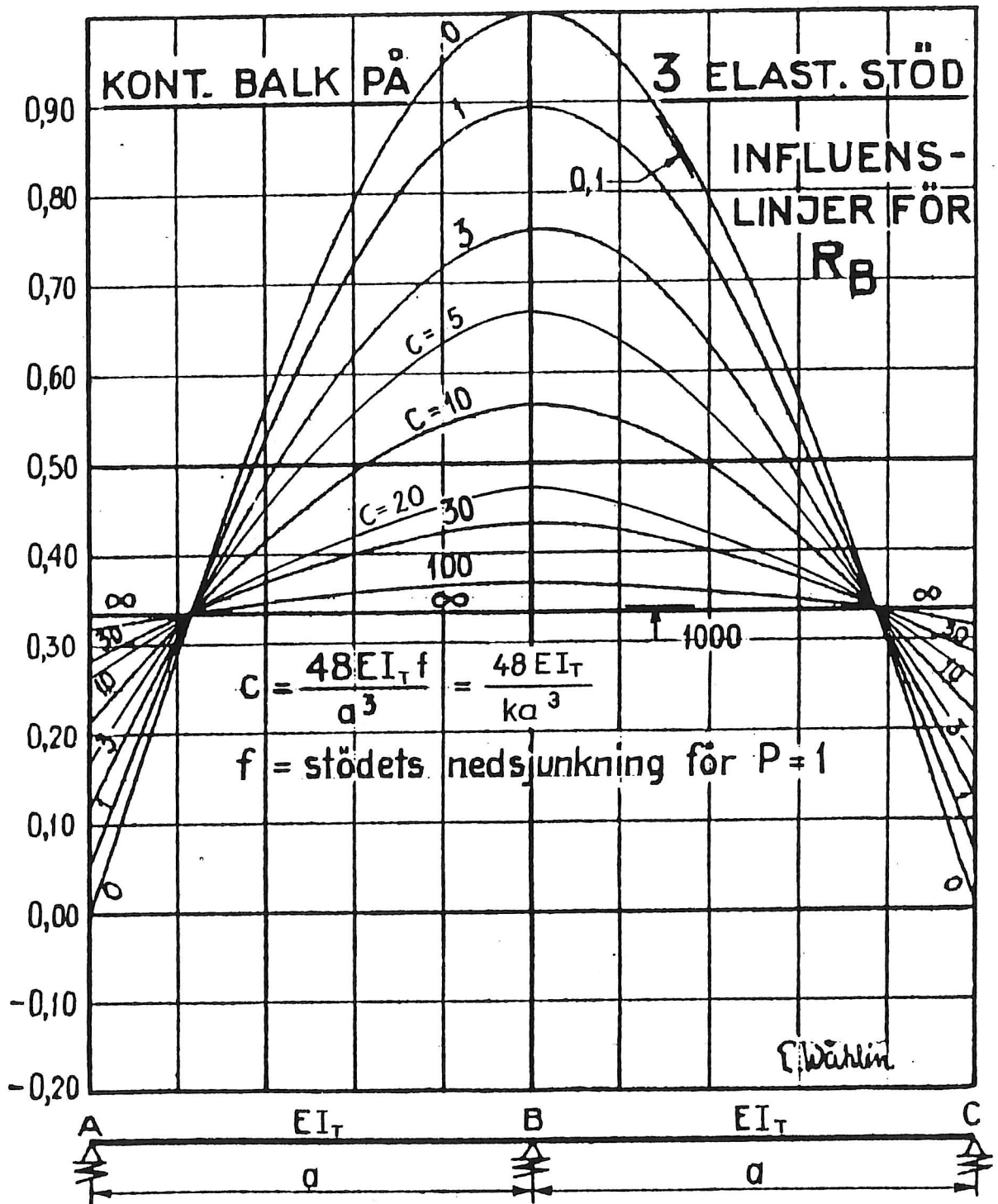


Fig. 26. Influenslinier for  $R_B$ . Fra [8].

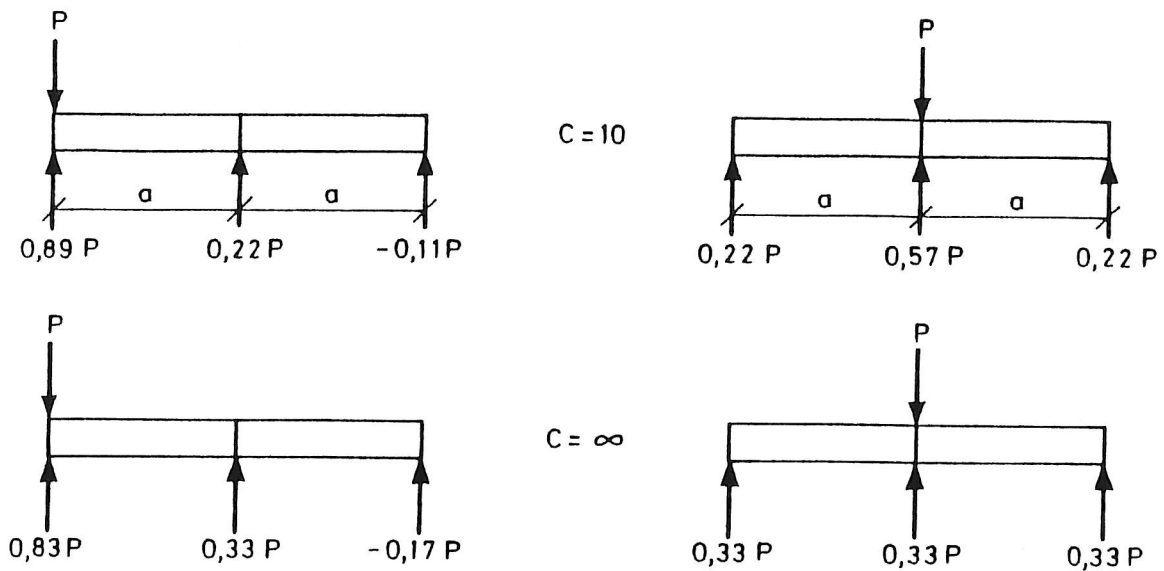


Fig. 27. Lastfordeling for forskellige  $C$ -værdier.

Det ses, at forventningen om fejl  $\leq 10\%$  kun holder stik for yderbjælken, der til gengæld er den hårdest belastede og derfor som regel vil være afgørende for valget af dimensioner.

Det dimensionerende moment i tværbjælken bliver væsentligt mindre for  $C = 10$  end for  $C = \infty$ , nemlig  $-0,11 Pa$  mod  $-0,17 Pa$  for last over yderbjælken og  $+ 0,22 Pa$  mod  $+ 0,33 Pa$  for last over midterbjælken.

#### Risteværk med konstant bjælkeafstand, men forskellige bjælkestivheder

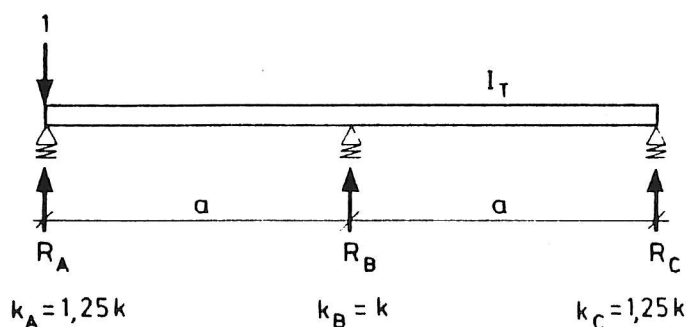
I simple tilfælde, hvor kun en enkelt hovedbjælke har en anden stivhed end de øvrige, eller hvor to symmetrisk anbragte bjælker, f.eks. yderbjælkerne, har en anden stivhed end risteværkets øvrige bjælker, kan beregningen let føres tilbage til beregning af risteværker med lige stive bjælker.

Som eksempel beregnes lastfordelingen i et risteværk med 3 hovedbjælker, hvor midterbjælken har stivheden  $I$  og yderbjælkerne stivheden  $\alpha \cdot I$ .

Ideen i metoden er, at den fejl, der opstår ved at benytte influenslinierne for en (tvær-)bjælke på lige stive fjedre, korrigeres ved tilføjelse af fiktive laster, som så igen fordeles på tilsvarende måde etc., indtil korrektionerne er forsvindende.

$$C = \frac{48EI_T}{ka^3} = 3$$

$$\alpha = 1,25$$



1) Lige stive fjedre	0,940	0,120	-0,060
2) Korrektion i A og C	0,235		-0,015
3) De under 2) tilføjede kræfter påføres med modsat fortegn:			
Last -0,235 i A	-0,221	-0,028	0,014
Last 0,015 i C	-0,001	0,002	0,014
4) Korrektion i A og C	-0,056		0,007
5) Last 0,056 i A	0,053	0,007	-0,003
Last -0,007 i C	0,000	-0,001	-0,007
6) Korrektion i A og C	0,013		-0,003
7) Last -0,013 i A	-0,012	-0,002	0,001
Last 0,003 i C	0,000	0,000	0,003
8) Korrektion i A og C	-0,003		0,001
Last 0,003 i A	0,003	0,000	0,000
Last -0,001 i C	0,000	0,000	-0,001
9) Her sluttet iterationen			
Resultat = $\sum_1^9 R_n$	0,951	0,098	-0,049

Fig. 28. Lastfordeling ved iteration. Taleksempel.

Den viste, iterative metode er bekvem at anvende, når  $\alpha$  ikke afviger meget fra værdien 1. For værdier af  $\alpha$  i nærheden af 0 eller 2 er konvergensens meget dårlig, idet korrektionerne i skridt 2, 4, 6 etc. er af næsten samme størrelse som den angribende last.

I stedet for den iterative beregning kan der opstilles formler til bestemmelse af korrigerede influenstal. Disse bliver dog så komplicerede, at det som regel vil være enklere at regne risteværket på sædvanlig måde som en statisk ubestemt konstruktion. For det her omhandlede risteværk (jfr. fig. 24) bliver der kun én overtallig, svarende til at tværbjælken er én gang statisk ubestemt.

Endelig kan der, jfr. side 25, opstilles formler for  $R_A$ ,  $R_B$  og  $R_C$  som funktioner af  $\alpha$  og  $C$ . Disse bliver dog også ganske komplicerede, når der er mange hovedbjælker.

For risteværket med 3 hovedbjælker fås de nedenfor anførte udtryk:

$$R_A = \frac{(4\alpha+1)C + 32\alpha}{(4\alpha+2)C + 32\alpha}$$

$$R_B = \frac{2C}{(4\alpha+2)C + 32\alpha}$$

$$R_C = \frac{-C}{(4\alpha+2)C + 32\alpha}$$

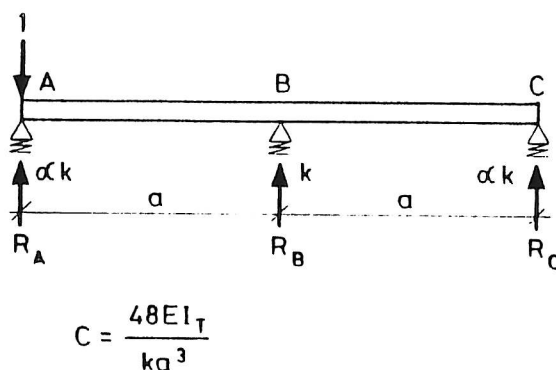


Fig. 29. Risteværk med symmetrisk varierende stivhed.

$$R_A = \frac{2\alpha C}{(4\alpha+2)C + 32\alpha}$$

$$R_B = \frac{2C + 32\alpha}{(4\alpha+2)C + 32\alpha}$$

$$R_C = R_A$$

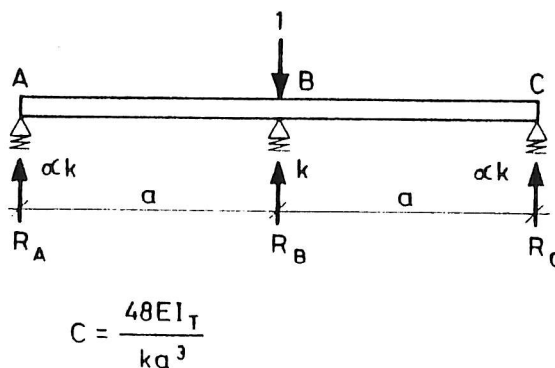


Fig. 30. Risteværk med symmetrisk varierende stivhed.

### Flere tværbjælker i hvert brofag.

Når der er flere, eftergivelige tværbjælker i et fag, vil de alle medvirke til lastfordelingen uanset lastplaceringen - i modsætning til risteværket med stive tværbjælker. Fordelingen af en last over en tværbjælke vil jo normalt give hovedbjælkerne nedbøjninger, der ikke fordeler sig lineært over et tværsnit i risteværket. Herved påtvinges de øvrige tværbjælker krumninger, der giver anledning til, at systemet påvirkes med tillægskræfter, som igen påvirker krumningen af den direkte belastede tværbjælke.

Det indses således, at man ikke uden videre kan anvende den foran beskrevne metode - tværbjælken som en bjælke på elastiske understøtninger - med uændrede stivhedstal.

Man kunne tænke sig at gennemføre en beregning med korrigerede stivhedstal, hvis størrelse iøvrigt måtte være forskellig for de forskellige tværbjælker. (Eksempelvis vil fjederkonstanten  $k_{\frac{1}{4}}$  for last i en bjælkes fjerdedelspunkt være større end fjederkonstanten  $k_{\frac{1}{2}}$  for last i fagmidten).

Bestemmelsen af sådanne fjederkonstanter er dog så kompliceret, at en traditionel beregning af risteværket som statisk ubestemt konstruktion må foretrækkes.

En "mellemløsning" kunne bestå i at benytte risteværket med én tværdrager som statisk bestemt hovedsystem, men også denne metode bliver unødigt besværlig selv med kun 3 hovedbjælker.

For at give et indtryk af den virkning, der opnås ved at anordne flere tværbjælker i et fag, er nedenfor anført resultaterne for et risteværk med 3 hovedbjælker og 3 lastfordelende tværbjælker. Stivhedstallet  $C$  refererer til tværbjælken ved fagmidten.

Risteværket er 3 gange statisk ubestemt. P.gr.a. symmetrien i last og geometri kan antallet af ubekendte kontaktkræfter mellem hoved- og tværbjælker dog indskrænkes til 2. På fig. 32 er angivet momentkurverne for den mellemste hovedbjælke for forskellige værdier af stivhedstallet  $C$ . Til sammenligning er vist momentkurverne for et risteværk med kun én tværbjælke



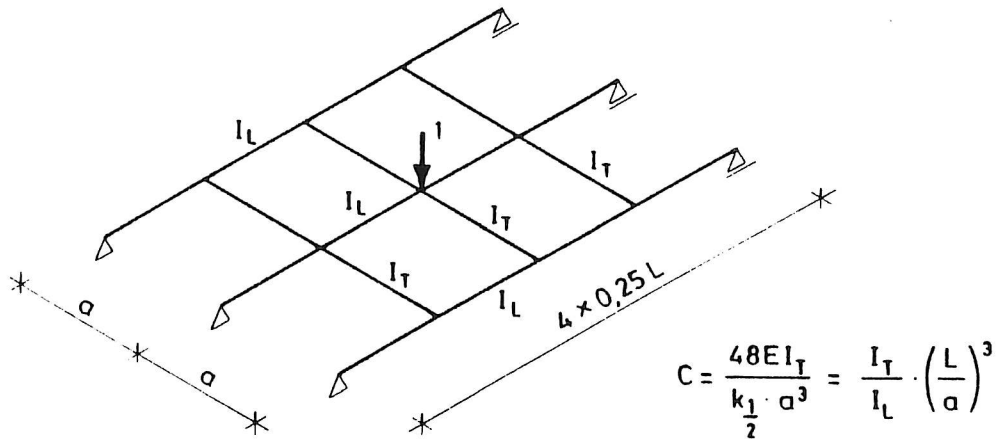


Fig. 31. Risteværk med 3 eftergivelige tværbjælker.

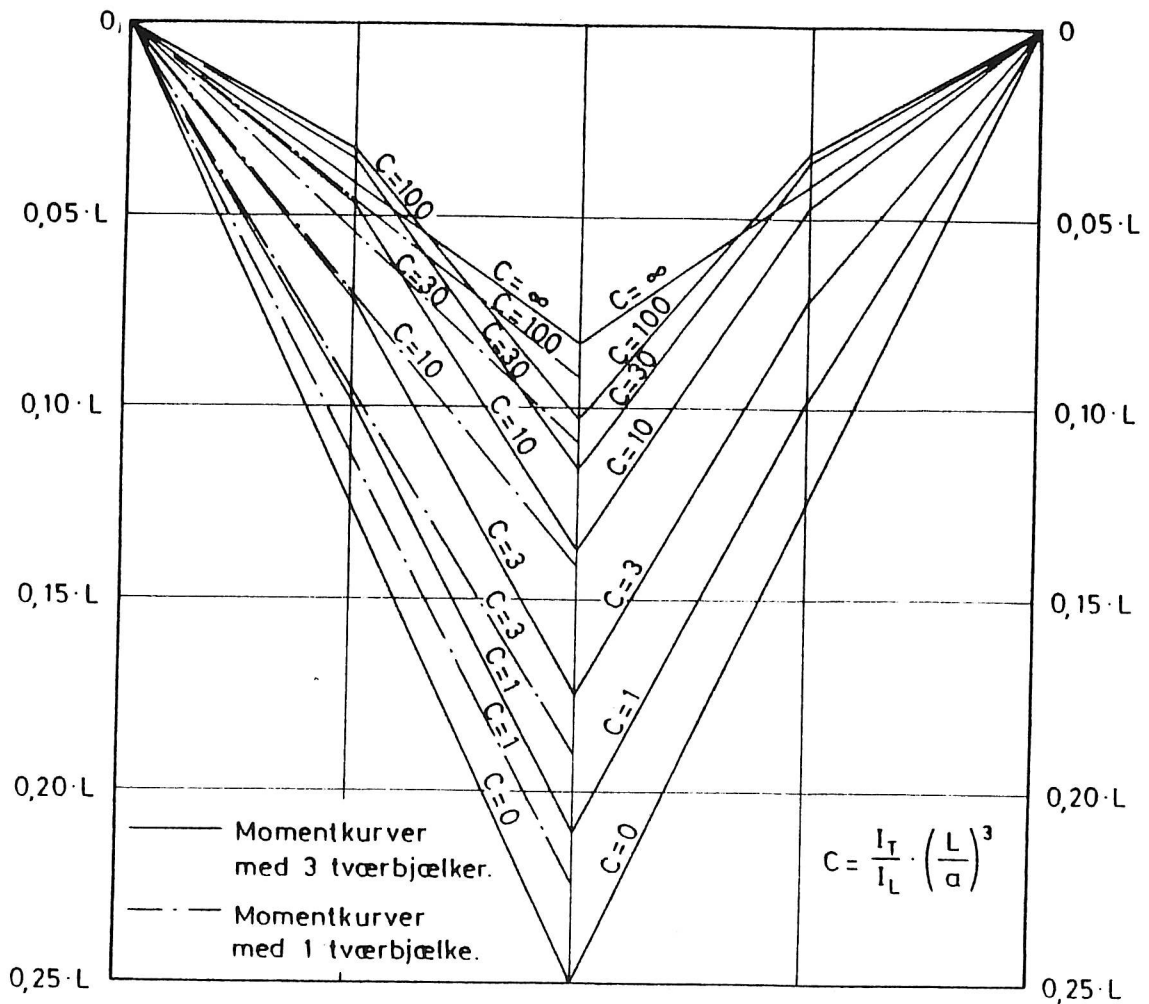


Fig. 32. Moment i midterste hovedbjælke (fig. 31).

(ved fagmidte). Sidstnævnte er for overskuelighedens skyld kun indtegnet i venstre side af figuren. Bemærk, at momentkurverne for  $C = 0$  og  $C = \infty$  er ens i de to tilfælde.

Det ses af fig. 32, at virkningen af at anordne 3 tværbjælker i stedet for én er ret beskeden, i hvert fald hvad angår det maksimale moment.

### Betydning af tværbjælker i nabofag

For risteværker med  $\infty$  stive tværbjælker og den ydre last placeret på en tværbjælke byder det ikke på særlige besværligheder, hvis der er tværbjælker i nabofag til det belastede fag. Ud fra et tilsvarende ræsonnement som det, der er anført for flere  $\infty$  stive tværbjælker i samme fag (side 19-20), indses det, at man ved den videre fordeling kun behøver at medtage den tværbjælke, hvor lasten er placeret.

Anderledes stiller det sig med systemer med eftergivelige tværbjælker. På samme måde som side 31 indses det, at lastfordelingen vil være påvirket af tværbjælker i nabofag, da disse påtvinges krumninger, som modsvares af ekstra laster på hovedbjælkerne.

I reglen er det enklest at udføre en sædvanlig beregning af risteværket som statisk ubestemt konstruktion, men i nogle simple tilfælde kan det være bekvemmere at føre beregningen tilbage til bjælker på elastiske understøtninger. I det følgende skal der vises nogle eksempler på dette.

På fig. 33 er vist et risteværk over 2 fag. Lasten  $P$ , der virker over den ene tværbjælke, opdeles i en symmetrisk og en antimetrisk last. For begge disse lasttyper kan systemet ækvivaleres med et 1-fags risteværk, og lastfordelingen kan derefter bestemmes ved hjælp af diagrammet på fig. 26. Til sidst adderes resultaterne for den symmetriske og den antimetriske last. Bemærk, at stivhedstallet  $C = EI_T L^3 : (ka^3)$  bliver forskelligt for de to lasttyper.

Taleksempel 3 (fig. 33-35):

$$L = 12 \text{ m}, \quad a = 2,5 \text{ m}, \quad I_L = 8 \cdot I_T$$

$$C_{\text{sym}} = \frac{48EI_T}{110E \cdot 8I_T} \cdot \left(\frac{12}{2,5}\right)^3 = 6,0$$

$$C_{\text{anti}} = \frac{48EI_T}{48E \cdot 8I_T} \cdot \left(\frac{12}{2,5}\right)^3 = 13,8$$

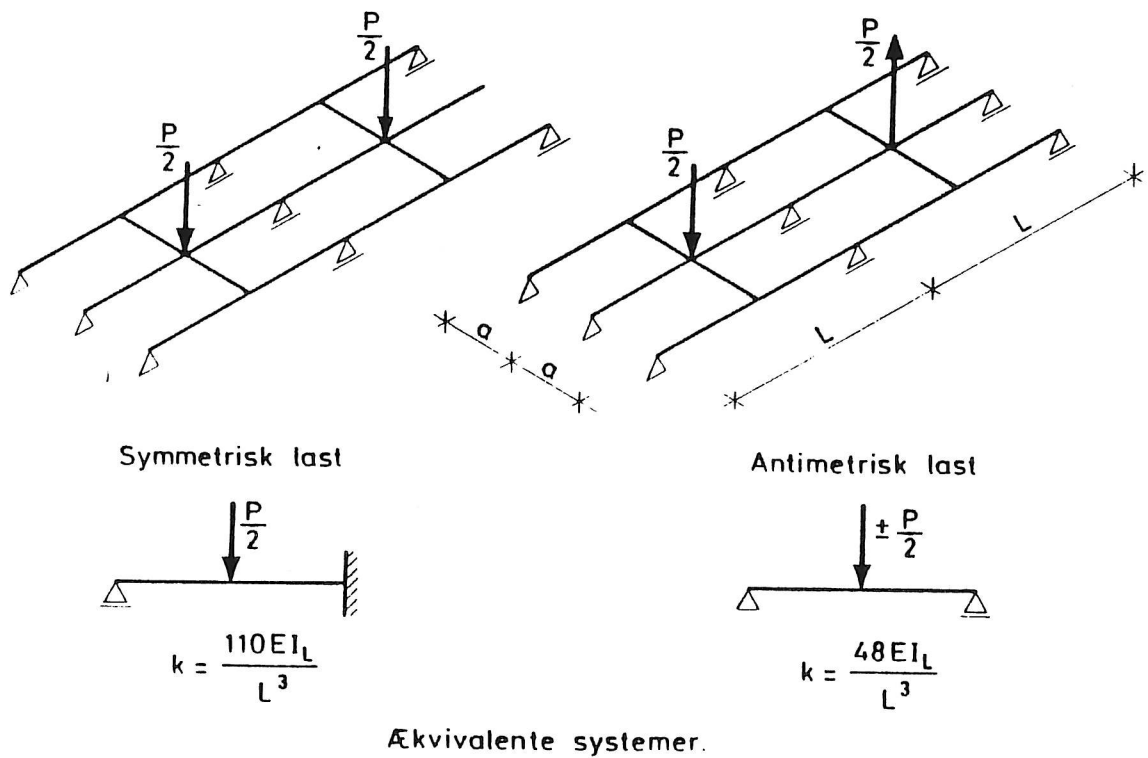


Fig. 33. 2-fags risteværk med 3 hovedbjælker.

Fordelingen på hovedbjælkerne bestemmes til

Symmetrisk last  $P_y = 0,18 \cdot \frac{P}{2} = 0,09 P$

$$P_m = 0,64 \cdot \frac{P}{2} = 0,32 P$$

Antimetrisk last  $P_y = 0,24 \cdot \frac{P}{2} = 0,12 P$

$$P_m = 0,52 \cdot \frac{P}{2} = 0,26 P$$

Hovedbjælkernes laster og momenter ses af fig. 34.

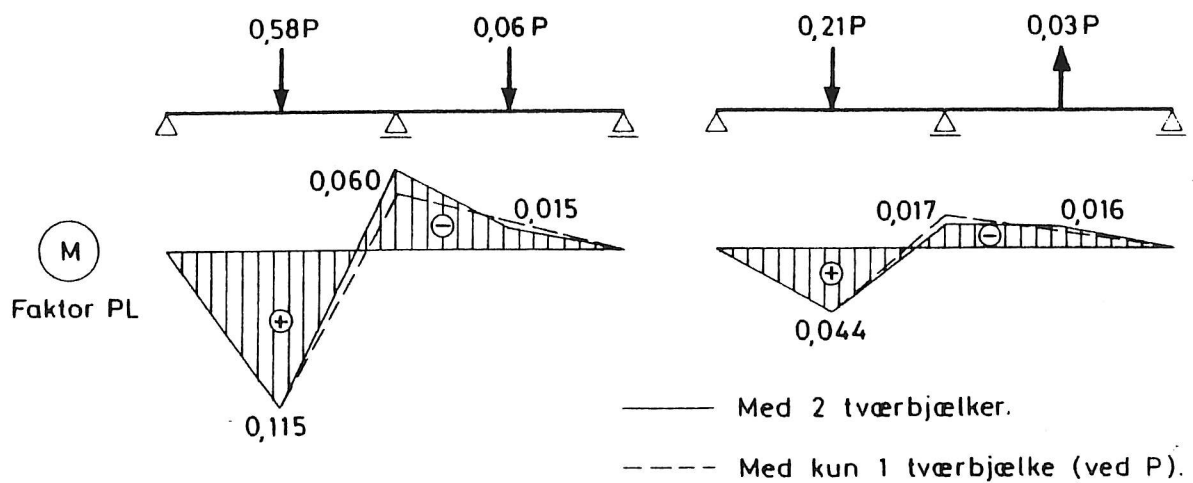
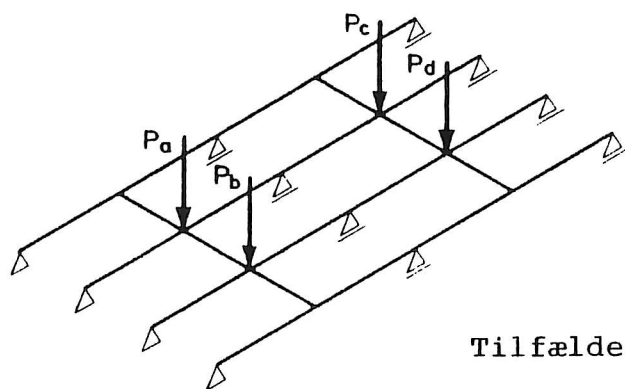


Fig. 34. 2-fags risteværk. Taleksempel 3.

Endelig er det på fig. 35 antydnet, hvorledes beregningen kan gennemføres for et 2-fags risteværk med 4 hovedbjælker.



Tilfælde 1:

$$P_a = P_b = P_c = P_d = \frac{P}{4}$$

Tilfælde 2:

$$P_a = P_b = -P_c = -P_d = \frac{P}{4}$$

$$\text{Tilfælde 3: } P_a = -P_b = P_c = -P_d = \frac{P}{4}$$

$$\text{Tilfælde 4: } P_a = -P_b = -P_c = P_d = \frac{P}{4}$$

Fig. 35. Lastopdeling i 2-fags risteværk med 4 hovedbjælker.

RISTEVÆRK AF BJÆLKER MED VRIDNINGSSTIVHED

I mange tilfælde kan lastfordelingen forbedres ved at benytte vridningsstive hovedbjælker (eller tage disses vridningsstivhed i regning!). Herved kompliceres beregningerne en del.

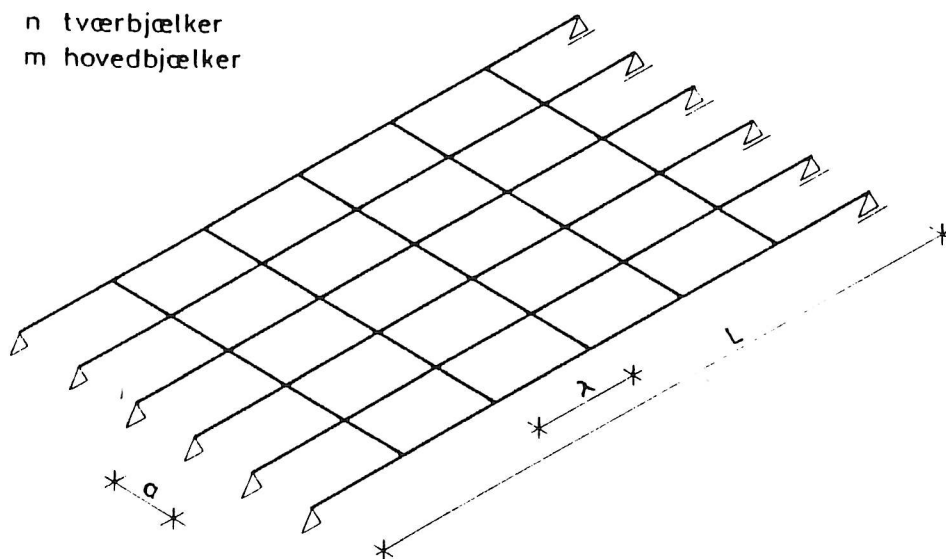


Fig. 36. Vilkaarligt risteværk med vridningsstive hovedbjælker.

Således fås for det på fig. 36 viste risteværk  $n(2m-2)$  over-tallige kontaktkræfter og -momenter, medens antallet kun ville være  $n(m-2)$  for et risteværk med vridningsslappe bjælker. Tværbjælkerne er i begge tilfælde regnet vridningsslappe.

En manuel overslagsberegning kan derfor kun gennemføres for simple systemer og lasttilfælde, og vil derfor i det følgende kun blive gennemført for risteværker med  $\infty$  stive tværbjælker. Hovedresultatet - at vridningsstivheden har stor betydning - har dog også gyldighed for systemer med eftergivelige tværbjælker.

Kriteriet for, om det kan betale sig at medregne hovedbjælker-nes vridningsstivhed, er, jfr. side 6,

$$I_V > \frac{1}{200} \cdot \sqrt{\frac{a}{\lambda}} I_T I_L$$

Heri indføres  $\lambda = \beta \cdot L$  og det på side 23 definerede stivhedstal

$$C = \frac{48EI_T}{ka^3} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{I_T}{I_L} \cdot \left(\frac{L}{a}\right)^3$$

svarende til, at fjederkonstanten udtrykkes som

$$k = \gamma \cdot \frac{48EI_L}{L^3}$$

og man får følgende betingelse:

$$I_V > \frac{1}{200} \cdot \sqrt{\frac{a}{\beta L} \cdot \left(\frac{a}{L}\right)^2 \cdot \left(\frac{L}{a}\right)^2 \cdot \frac{I_L}{I_T} \cdot I_T^2} \Rightarrow$$

$$I_V > \frac{I_T}{200 \cdot \sqrt{\beta \gamma C}} = \frac{I_L}{200} \cdot \left(\frac{a}{L}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{\gamma C}{\beta}} \quad (5)$$

Eksempelvis fås for det på side 17 viste risteværk  $\beta = 0,5$  og  $\gamma = 1$ , og dermed

$$I_V > 0,007 \cdot I_L \cdot \left(\frac{3,0}{12,0}\right)^2 \cdot \sqrt{C} \approx \frac{I_L \sqrt{C}}{2300} \quad (5a)$$

På fig. 37 er vist nogle eksempler på forholdet  $I_V:I_L$  for forskellige bjælketværsnit. Det ses, at selv for ret store værdier af stivhedstallet  $C$ , dvs. med en ret stiv tværbjælke, opfyldes kriteriet (5a) let for alle tværsnittene undtagen I-profilet. For alle de åbne tværsnit gælder det dog, at forholdet  $I_V:I_L$  med god tilnærmelse afhænger af forholdet tykkelse: højde i 2. potens og således er meget følsomt for ændringer i krop- og fligtykkelser.

Dette gælder ikke for kasseprofilet, der generelt er meget anvendeligt på grund af sin store vridningsstivhed. Udnyttelsen af denne forudsætter passende afstivninger, der sikrer, at kasseprofilet bevarer sin form. Angående nærmere behandling af dette emne henvises til [9].

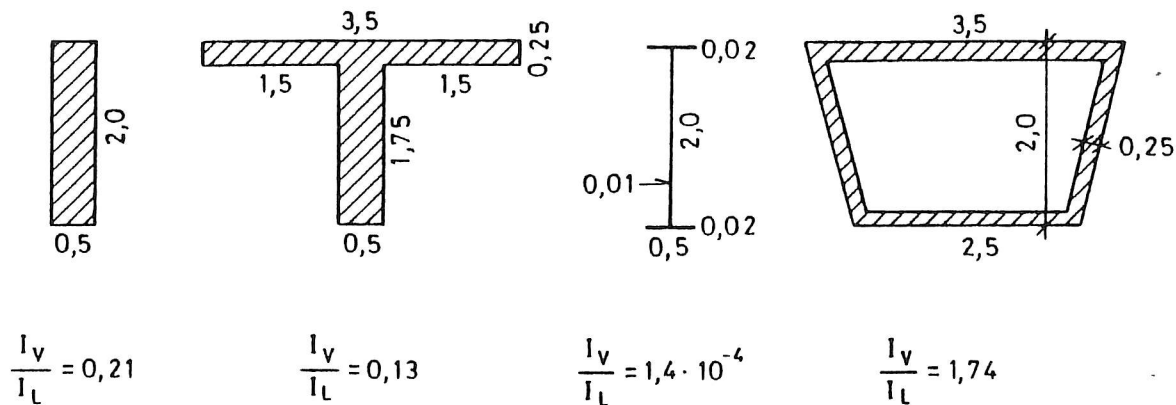


Fig. 37. Forholdet  $\frac{I_V}{I_L}$  for forskellige tværsnit. Mål i m.

#### A. Risteværk med stive tværbjælker

Kravet (1) til tværbjælkernes bøjningsstivhed (se side 6) må skærpes, når vridningsstivheden tages i regning, hvis man ønsker at regne tværbjælkerne uendeligt stive. Dels viser det sig, at de dimensionerende momenter i tværbjælkerne bliver større end før, og dels medfører den bedre lastfordeling, at hovedbjælkernes flytninger bliver mindre. Dette gælder også for flytningsdifferenserne mellem hovedbjælkerne og dermed ligeledes for tværbjælkens krumninger. Når disse skal være mindre end før, samtidig med at tværbjælkerne skal optage større momenter, må deres bøjningsstivhed forøges.

Indtil nærmere undersøgelse foreligger, foreslås det, at kravet til  $I_T$  sættes til 2 á 5 gange den værdi, der fremgår af (1). Størst værdi benyttes, når vridningsstivheden af hovedbjælkerne er stor, dvs. når den forbedrer lastfordelingen væsentligt.

#### Risteværk med konstant bjælkeafstand og -stivhed

Der ses kun på tilfældet med en enkelt tværbjælke midt i det betragtede brofag.

Et risteværk med  $n$  ens, ækvidistante hovedbjælker betragtes, se fig. 38. Det benyttes, at tværbjælken p.gr.a. sin stivhed

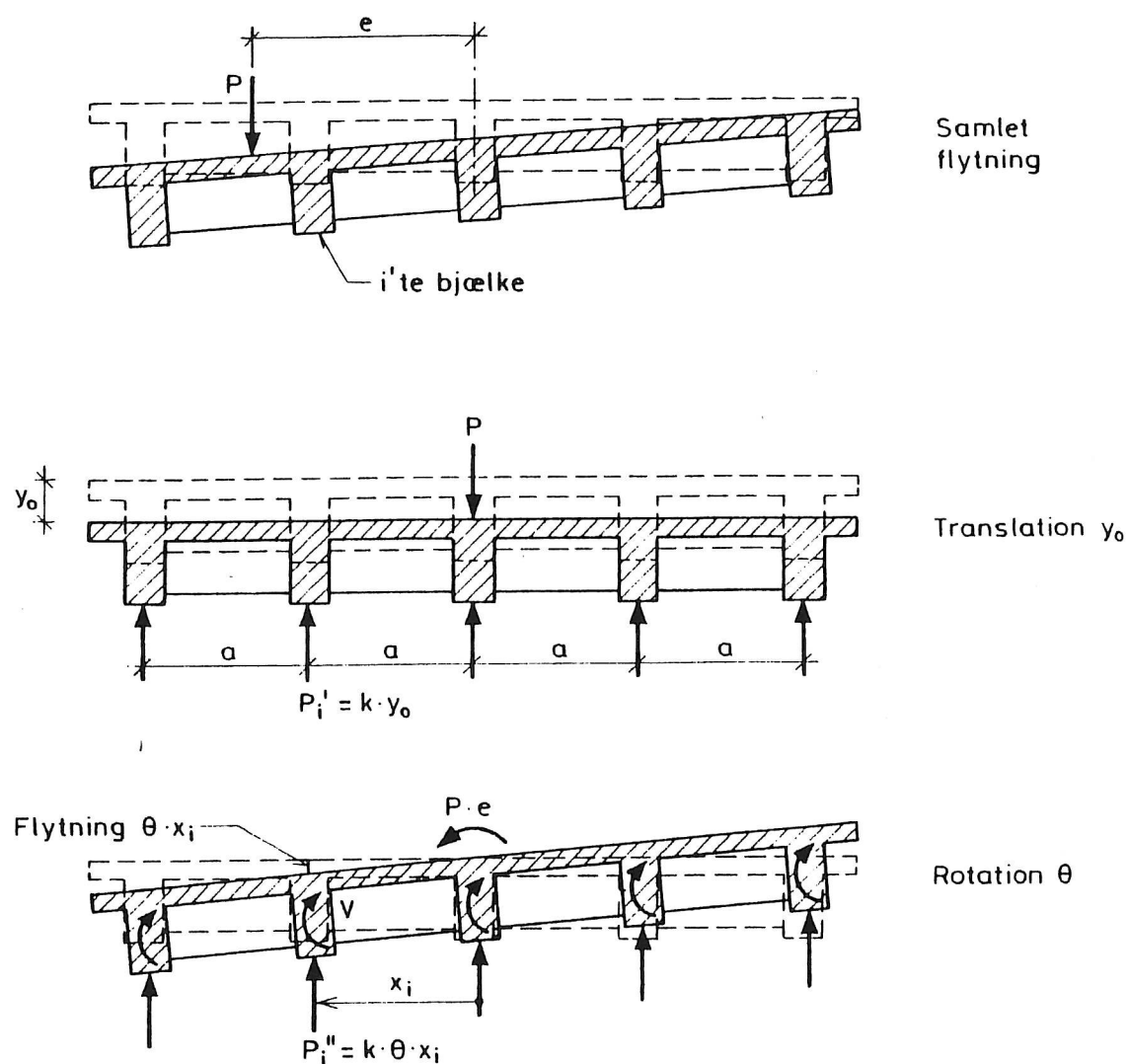


Fig. 38. Risteværk med vridningsstive hovedbjælker og uendeligt stiv tværbjælke.

holder sig retliniet. Risteværkets flytninger ved tværbjælken deles som tidligere op i en translation og en rotation. Lasten virker på tværbjælken, og figuren viser påvirkningerne på tværbjælken.

For ren translation fås

$$P_i' = k \cdot y_0 \quad \text{og} \quad n \cdot P_i' = P \quad \Rightarrow \quad P_i' = \frac{P}{n}$$

hvor  $k$  er fjederkonstanten for en hovedbjælke = den kraft der skal til for at give flytningen 1, jfr. side 22.



For ren rotation fås

$$P_i'' = k \cdot (\theta x_i) \quad \text{og} \quad V_i = V = k_V \cdot \theta$$

hvor  $k_V$  er fjederkonstanten for vridning = det vridningsmoment, der skal påføres hovedbjælken ved tværbjælken for at give vinkeldrejningen 1.

Momentligevægten giver

$$P \cdot e = n \cdot V + \sum_1^n P_i'' \cdot x_i = \theta \cdot (nk_V + k \cdot \sum_1^n x_i^2)$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{P \cdot e}{nk_V + k \sum_1^n x_i^2}$$

Denne værdi indføres i udtrykket for  $P_i''$ , og den samlede påvirkning på tværbjælken fra den  $i$ 'te bjælke bliver

$$P_i = \frac{P}{n} + \frac{P \cdot e}{n \cdot \frac{k_V}{k} + \sum_1^n x_i^2} \cdot x_i \quad (6)$$

$$V = \frac{P \cdot e}{n + \frac{k}{k_V} \cdot \sum_1^n x_i^2} \quad (7)$$

Med henblik på at få et generelt overblik over lastfordelingen er følgende form mere hensigtsmæssig:

$$P_i = \frac{P}{n} + \frac{P \cdot \frac{e}{a}}{n \cdot \frac{k_V}{ka^2} + \sum_1^n \left(\frac{x_i}{a}\right)^2} \cdot \frac{x_i}{a} \quad (6a)$$

$$V = \frac{Pe}{n + \frac{ka^2}{k_V} \cdot \sum_1^n \left(\frac{x_i}{a}\right)^2} \cdot \frac{k_V}{ka^2} \quad (7a)$$

Først betragtes 2 grænsetilfælde:

For  $k_V: (ka^2) = 0$ , dvs. ingen vridningsstivhed, går (6) over i (2), og (7) giver  $V = 0$ .

For  $k_V:(ka^2) \rightarrow \infty$ , dvs. uendelig vridningsstive hovedbjælker, fås

$$P_i = \frac{P}{n} \quad \text{og} \quad V = \frac{Pe}{n}$$

I dette tilfælde fordeles lasten  $P$  altså ligeligt over alle hovedbjælkerne, uanset dens placering på tværbjælken.

I tabellen på side 42 er angivet resultater af lastfordelingen efter (6a) og (7a), når parameteren  $k_V:(ka^2)$  varierer. I praksis vil der kun sjældent opnås værdier over  $k_V:(ka^2) = 10$ .

For overskuelighedens skyld er understøtningerne på fig. 40 angivet som sædvanlige, elastiske understøtninger. Disse skal faktisk suppleres med torsionsfjedre, der modellerer hovedbjælkernes vridningsstivhed. På fig. 39 er vist et eksempel på dette.



Fig. 39. Modellering af understøtningsbetingelser for tværbjælke på vridningsstive hovedbjælker.

C = ∞		$k_V: (ka^2)$									
		0	0,1	0,5	1	2	5	10	∞		
2 bjælker	e = 0,5 a (last i A)	$R_A$	1,00	0,86	0,67	0,60	0,56	0,52	0,51	0,50	
		V:a	0	0,07	0,17	0,20	0,22	0,24	0,24	0,25	
3 bjælker	e = a (last i A)	$R_A$	0,83	0,77	0,62	0,53	0,46	0,39	0,37	0,33	
		$R_B$	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	
		$R_C$	-0,17	-0,10	0,05	0,13	0,21	0,27	0,30	0,33	
		V:a	0	0,04	0,14	0,20	0,25	0,29	0,31	0,33	
3 bjælker	e = 0 (last i B)	Alle R	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	
		V:a	0	0	0	0	0	0	0	0	
4 hovedbjælker	e = 1,5 a (last i A)	$R_A$	0,70	0,67	0,57	0,50	0,42	0,34	0,30	0,25	
		$R_B$	0,40	0,39	0,36	0,33	0,31	0,28	0,27	0,25	
		$R_C$	0,10	0,11	0,14	0,17	0,19	0,22	0,23	0,25	
		$R_D$	-0,20	-0,17	-0,07	0,00	0,08	0,16	0,20	0,25	
		V:a	0	0,03	0,11	0,17	0,23	0,30	0,33	0,38	
	4 hovedbjælker	e = 0,5 a (last i B)	$R_A$	0,40	0,39	0,36	0,33	0,31	0,28	0,27	0,25
$R_B$			0,30	0,30	0,29	0,28	0,27	0,26	0,26	0,25	
$R_C$			0,20	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,24	0,25	
$R_D$			0,10	0,11	0,14	0,17	0,19	0,22	0,23	0,25	
V			0	0,01	0,04	0,06	0,08	0,10	0,11	0,13	
4 hovedbjælker	e = 0	Alle R	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	
		V:a	0	0	0	0	0	0	0	0	
5 hovedbjælker	e = 2 a (last i A)	$R_A$	0,60	0,58	0,52	0,47	0,40	0,31	0,27	0,20	
		$R_B$	0,40	0,39	0,36	0,33	0,30	0,26	0,23	0,20	
		$R_C$	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	
		$R_D$	0,00	0,01	0,04	0,07	0,10	0,14	0,17	0,20	
		$R_E$	-0,20	-0,18	-0,12	-0,07	0,00	0,09	0,13	0,20	
		V:a	0	0,02	0,08	0,13	0,20	0,29	0,33	0,40	
	5 hovedbjælker	e = a (last i B)	$R_A$	0,40	0,39	0,36	0,33	0,30	0,26	0,23	0,20
			$R_B$	0,30	0,30	0,28	0,27	0,25	0,23	0,22	0,20
			$R_C$	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20
			$R_D$	0,10	0,10	0,12	0,13	0,15	0,17	0,18	0,20
$R_E$			0,00	0,01	0,04	0,07	0,10	0,14	0,17	0,20	
5 hovedbjælker	e = 0 (last i C)	Alle R	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	
		V:a	0	0	0	0	0	0	0	0	

TABEL. Lastfordeling i risteværk med vridningsstive hovedbjælker og ∞ stiv tværbjælke, se figur 40. Definition af  $k_V$  og  $k$  se side 40 og 22.

I tabellen kan der interpoleres retliniet mellem de anførte værdier af ekscentriciteten  $e$ , hvilket hænger sammen med, at tværbjælken er antaget uendelig stiv.

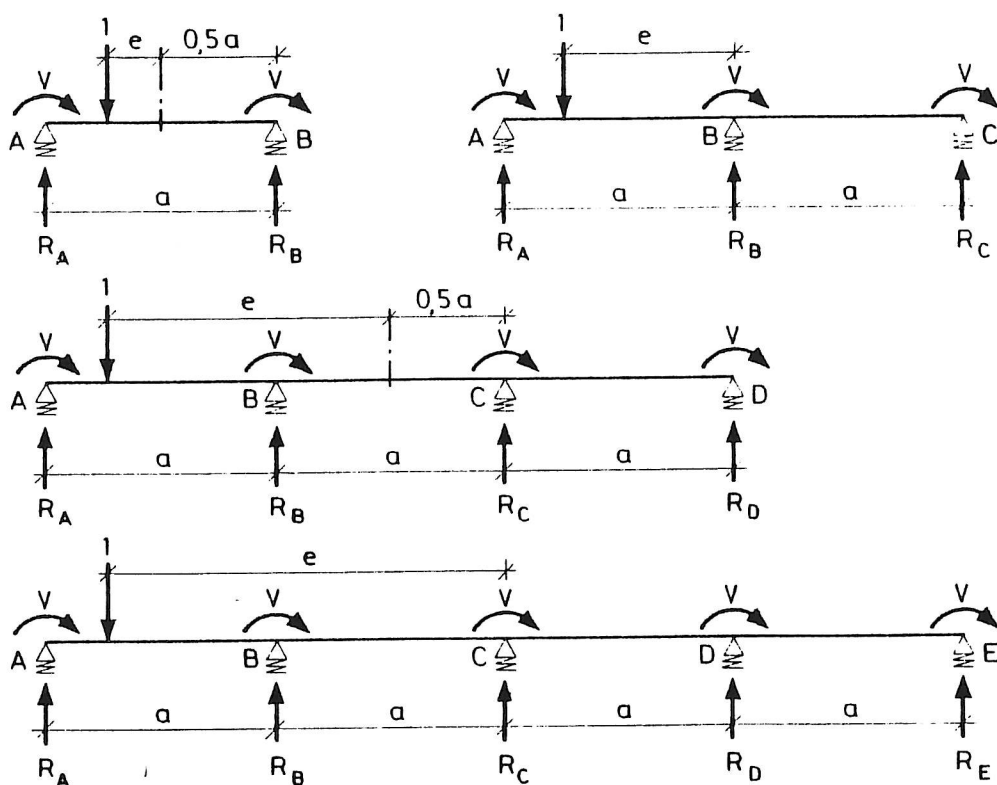


Fig. 40. Lastfigurer til tabel på modstående side.

### Risteværk med uens bjælkeafstande og -stivheder

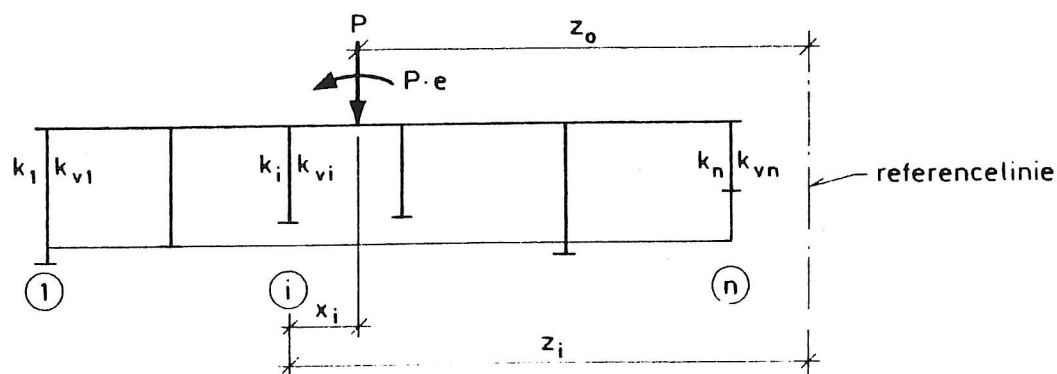


Fig. 41. Vilkaarligt risteværk med vridningsstive hovedbjælker og  $\infty$  stiv tværbjælke.

På samme måde som tidligere kan de på side 39-40 udledte udtryk for lastfordelingen udvides til at gælde for et vilkårligt risteværk. Med betegnelserne på fig. 41 fås:

Ren translation  $y_0$ :

$$P'_i = k_i \cdot y_0 \quad \text{og} \quad \sum_1^n P'_i = y_0 \cdot \sum_1^n k_i = P$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{P}{\sum_1^n k_i} \quad \Rightarrow \quad P'_i = \frac{k_i}{\sum_1^n k_i} \cdot P$$

hvor  $k_i$  er fjederkonstanten for lodret flytning af den  $i$ 'te bjælke.

Resultantens afstand  $z_0$  fra en referencelinie bestemmes af

$$\sum_1^n P'_i \cdot z_i = P \cdot z_0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = \frac{\sum_1^n k_i z_i}{\sum_1^n k_i}$$

For en ren rotation  $\theta$  fås

$$P''_i = k_i \cdot y_i = k_i \cdot (\theta x_i) \quad \text{og} \quad V_i = k_{Vi} \cdot \theta$$

hvor  $k_{Vi}$  er vridningsfjederkonstanten for den  $i$ 'te bjælke.

Momentligevægten giver

$$\sum_1^n V_i + \sum_1^n P''_i x_i = P \cdot e$$

$$\Rightarrow \theta \cdot \sum_1^n k_{Vi} + \theta \cdot \sum_1^n k_i x_i^2 = P e$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{P \cdot e}{\sum_1^n k_{Vi} + \sum_1^n k_i x_i^2}$$

Denne værdi indføres i udtrykket for  $P''_i$  og  $V_i$ , og den samlede virkning på tværbjælken fra den  $i$ 'te bjælke kan nu opskrives:

$$P_i = \frac{k_i}{\sum_1^n k_i} \cdot P + \frac{P \cdot e}{\sum_1^n k_{Vi} + \sum_1^n k_i x_i^2} \cdot k_i x_i \quad (8)$$

$$V_i = \frac{Pe}{\sum_1^n k_{Vi} + \sum_1^n k_i x_i^2} \cdot k_{Vi} \quad (9)$$

En mere hensigtsmæssig formulering kan være

$$P_i = \frac{k_i}{\sum_1^n k_i} \cdot P + \frac{P \cdot \frac{e}{b}}{\frac{\sum_1^n k_{Vi}}{b^2 \cdot \sum_1^n k_i} + \frac{\sum_1^n k_i}{\sum_1^n k_i} \cdot \left(\frac{x_i}{b}\right)^2} \cdot \frac{k_i}{\sum_1^n k_i} \cdot \frac{x_i}{b} \quad (8a)$$

og

$$V_i = \frac{P \cdot e}{\frac{\sum_1^n k_{Vi}}{b^2 \cdot \sum_1^n k_i} + \frac{\sum_1^n k_i}{\sum_1^n k_i} \cdot \left(\frac{x_i}{b}\right)^2} \cdot \frac{k_{Vi}}{b^2 \sum_1^n k_i} \quad (9a)$$

hvor  $b$  er en passende valgt referencebredde, f.eks. bjælkeafstanden hvis denne er konstant.

Hvis størrelserne  $\rho_i = k_i : \sum_1^n k_i$  og  $\rho_{Vi} = k_{Vi} : (b^2 \sum_1^n k_i)$  indføres, fås af (8a) og (9a) følgende lidt mere bekvemme udtryk

$$P_i = \rho_i \cdot P + \frac{P \cdot \frac{e}{b}}{\sum_1^n \rho_{Vi} + \sum_1^n \rho_i \left(\frac{x_i}{b}\right)^2} \cdot \rho_i \frac{x_i}{b} \quad (8b)$$

$$V_i = \frac{P \cdot e}{\sum_1^n \rho_{Vi} + \sum_1^n \rho_i \left(\frac{x_i}{b}\right)^2} \cdot \rho_{Vi} \quad (9b)$$

Taleksempel 4: S.u. risteværk med  $L = 25$  m og  $a = 2,5$  m fastholdt mod vridning ved enderne (fig. 42).

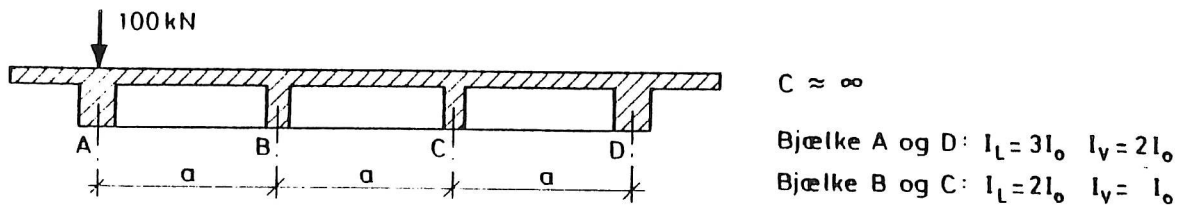


Fig. 42. Geometri og tværsnitsdata.

Idet alle hovedbjælkerne har samme understøtningsforhold, er fjederkonstanten  $k_i$  for en bjælke proportional med dens inertimoment, dvs.

$$\rho_i = \frac{I_{L_i}}{\sum_1 I_{L_i}} \Rightarrow \rho_A = \rho_D = \frac{3}{2 \cdot (3+2)} = 0,30$$

og

$$\rho_B = \rho_C = \frac{2}{2 \cdot (3+2)} = 0,20$$

Referencebredden sættes til  $b = a = 2,5$  m og størrelsen  $\rho_{Vi}$  får værdien

$$\rho_{Vi} = \frac{k_{Vi}}{\sum_1 k_i a^2} = \frac{\frac{4GI_V}{L}}{\frac{48E}{L^3} \cdot a^2 \cdot \sum I_L} = \frac{1}{12} \cdot \frac{G}{E} \cdot \frac{I_{Vi}}{\sum I_L} \cdot \left(\frac{L}{a}\right)^2$$

der med indsatte talværdier, herunder  $G = 0,43 E$ , giver

$$\rho_{VA} = \rho_{VD} = \frac{1}{12} \cdot 0,43 \cdot \frac{2}{10} \cdot \left(\frac{25}{5}\right)^2 = 0,18$$

$$\rho_{VB} = \rho_{VC} = \frac{1}{12} \cdot 0,43 \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{25}{5}\right)^2 = 0,09$$

$$\sum_1^4 \rho_{Vi} = 2 \cdot (0,18 + 0,09) = 0,54$$

$$\Rightarrow \sum_1^4 \rho_{Vi} + \sum_1^4 \rho_i \left(\frac{x_i}{a}\right)^2 = 0,54 + 2 \cdot (0,30 \cdot 1,5^2 + 0,20 \cdot 0,5^2) = 1,99$$

Herefter kan  $P_i$  og  $V$  beregnes ved anvendelse af (8b) og (9b):

$$P_A = 0,30 \cdot 100 + \frac{100 \cdot 1,5}{1,99} \cdot 0,30 \cdot 1,5 = 63,9 \text{ kN}$$

$$P_B = 0,20 \cdot 100 + \frac{100 \cdot 1,5}{1,99} \cdot 0,20 \cdot 0,5 = 27,5 \text{ kN}$$

$$P_C = 0,20 \cdot 100 + \frac{100 \cdot 1,5}{1,99} \cdot 0,20 \cdot (-0,5) = 12,5 \text{ kN}$$

$$P_D = 0,30 \cdot 100 + \frac{100 \cdot 1,5}{1,99} \cdot 0,30 \cdot (-1,5) = -3,9 \text{ kN}$$

$$V_A = V_D = \frac{100 \cdot 3,75}{1,99} \cdot 0,18 = 33,9 \text{ kNm}$$

$$V_B = V_C = \frac{100 \cdot 3,75}{1,99} \cdot 0,09 = 17,0 \text{ kNm}$$

Som regnekontrol kan benyttes, at projektionssummen skal være 100 kN, og at momentet om den ydre last skal være nul.

Til sammenligning kan det anføres, at den tilsvarende lastfordeling med ens hovedbjælker ( $I_L = 2I_0$  og  $I_V = I_0$ ) ville give følgende resultat:

$$P_A = 58,1 \text{ kN}; \quad P_B = 36,0 \text{ kN}; \quad P_C = 14,0 \text{ kN}; \quad P_D = -8,1 \text{ kN}$$

$$V_A = V_B = V_C = V_D = 24,7 \text{ kNm.}$$

Dette resultat kan naturligvis også fås af (6a) og (7a).

### B. Risteværk med eftergivelige tværbjælker

Når tværbjælkerne er eftergivelige, dvs. når deres deformationer ikke kan negligeres, bliver lastfordelingen dårligere, end når de kan regnes uendeligt stive. Hovedbjælkernes vridningsstivhed vil dog også i dette tilfælde indvirke gunstigt på lastfordelingen.

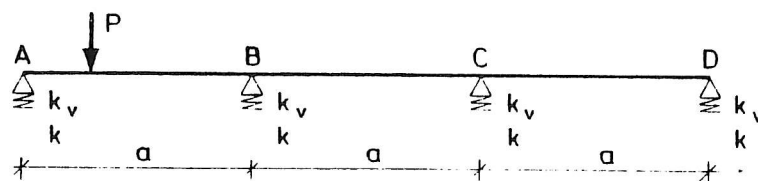
Nedenfor skal vises et eksempel på en manuel overslagsbereg-



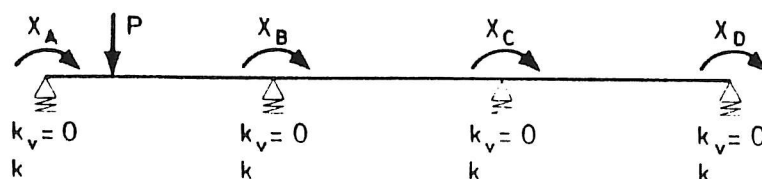
ning, der udnytter nogle af resultaterne for risteværker med vridningsslappe bjælker. En sådan beregning er dog kun sjældent overkommelig, og man vil som regel være henvist til at løse lastfordelingsproblemet ved hjælp af edb-teknikken (f.eks. med en programmerbar lommeregner) eller ved benyttelse af tabelværker, f.eks. [10]. Endelig skal der peges på muligheden for at beregne risteværket som en ortotrop plade, hvilket behandles i et senere afsnit.

Nogle af de tidligere resultater kan udnyttes på følgende måde: Ved beregningen af det på fig. 43 viste risteværk benyttes kraftmetoden med et system uden vridningsstivhed som hovedsystem og med de vridende momenter som overtallige. Da påvirkningerne på hovedsystemet let kan aflæses ved hjælp af diagrammerne for bjælker på elastiske understøtninger, se side 26 og 27 samt [8], er beregningen let at opstille, og dens praktiske gennemførlighed afhænger kun af mulighederne for bekvem løsning af lineære ligningssystemer. Ved udnyttelse af symmetri og antimetri kan antallet af overtallige ofte indskrænkes til det halve.

Virksomheden i hovedsystemet af de angribende momenter  $X_A$ ,  $X_B$ ,



System med vridningsstivhed



Hovedsystem

Fig. 43. Beregning med vridningsslapt hovedsystem.

$X_C$  og  $X_D$  kan findes ved hjælp af de nævnte diagrammer, idet influenstallet for en momentlast  $M$  i et punkt er lig med hældningen af influenskurven for virkningen af en punktlast. (Dette kan let eftervises helt generelt ved at opfatte momentlasten som et kraftpar med kræfterne  $M/a$  i indbyrdes afstand  $a$ . Ved en grænseovergang, hvor  $a \rightarrow 0$ , fås det nævnte resultat). Metoden demonstreres ved et taleksempel (fig. 44).

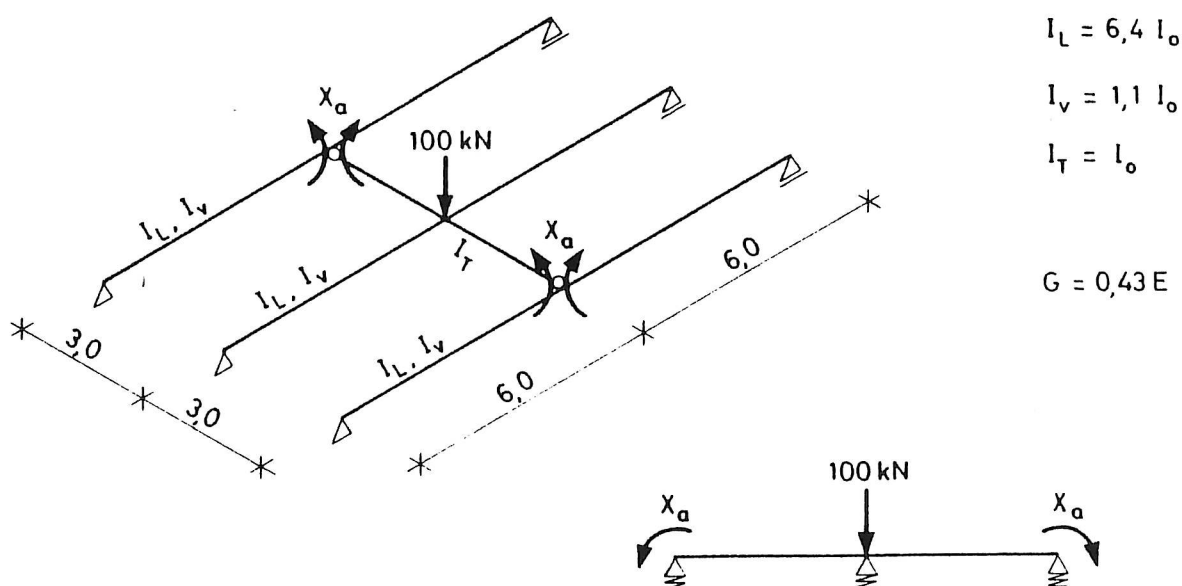


Fig. 44. Taleksempel 5. Hovedsystem for risteværksberegning.

Beregningen opstilles med fordel med den systematik, der normalt benyttes i forbindelse med kraftmetoden.

Med 100 kN som eneste påvirkning i hovedsystemet fås af diagrammet side 27 eller formelen side 25, svarende til  $C = 48$

$$EI_T : (ka^3) = \frac{I_T}{I_L} \cdot \left(\frac{L}{a}\right)^3 = 10$$

$$R_{A_0} = R_{C_0} = 21,74 \text{ kN} \quad \text{og} \quad R_{B_0} = 56,52 \text{ kN}$$

Momenterne bliver, jfr. fig. 45:

$$\begin{aligned} \text{Bjælke A: } \max M_{A_0} &= \frac{1}{4} \cdot 21,74 \cdot 12 = 65 \text{ kNm} \\ - \text{ B: } \max M_{B_0} &= \frac{1}{4} \cdot 56,52 \cdot 12 = 170 \text{ kNm} \\ - \text{ C: } \max M_{C_0} &= 65 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\text{Tværbjælke: } \max M_{T_0} = 21,74 \cdot 3,0 = 65 \text{ kNm}$$

Med  $X_a = 1$  som eneste påvirkning i hovedsystemet fås tværbjæl-  
kens reaktionsfordeling ved først at bestemme hældningen af  
influenslinierne som beskrevet ovenfor:

$$\curvearrowright \text{ ved A: } \frac{dR_A}{dx} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{3C+40}{6C+32} = -0,254 \quad (-0,26)$$

$$\frac{dR_B}{dx} = \frac{1}{a} \cdot \frac{24}{3C+16} = 0,174 \quad (0,18)$$

$$\frac{dR_C}{dx} = \frac{1}{a} \cdot \frac{3C-8}{6C+32} = 0,080 \quad (0,08)$$

$\curvearrowright$  ved C: tilsvarende

(Tal i parentes er resultater fra måling på fig. 25 og 26).  
Resultaterne er sammenstillet på fig. 45.

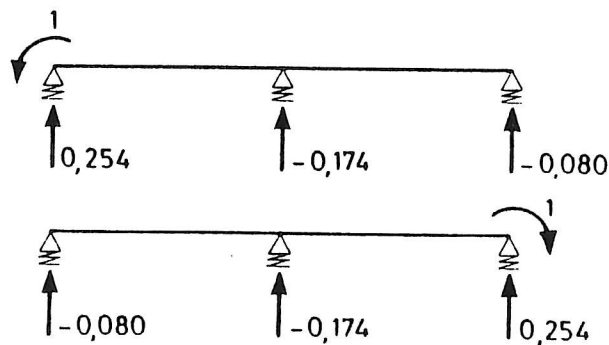
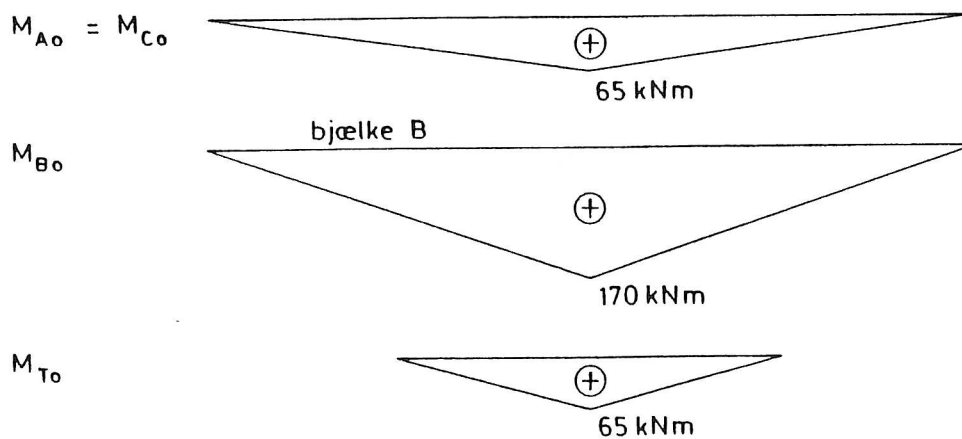


Fig. 45. Taleksempel 5. Tværbjælakens reaktioner for  $X_a = 1$ .

Herefter kan momenterne i hovedsystemet beregnes. Bemærk, at  
 $X_a = 1$  også virker på bjælke A og C og giver anledning til  
vridende momenter i disse. Resultaterne er vist på fig. 46.

M og V betegner henholdsvis bøjnings- og vridningsmomenter.

Momenter  $M_o$  for ydre last i hovedsystem



Momenter  $M_a$  og  $V_a$  for  $X_a = 1$  i hovedsystem

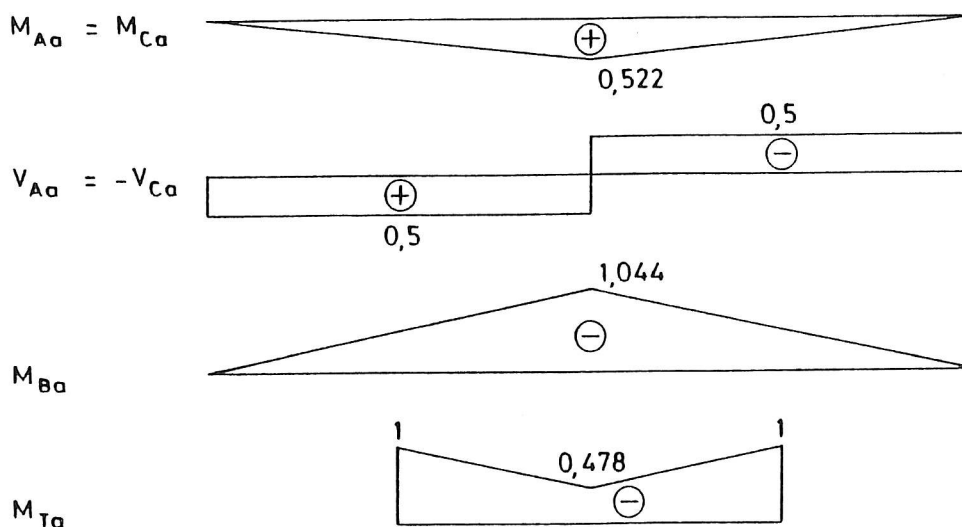


Fig. 46. Taleksempel 5. Momenter i hovedsystem.  
(Kun momentkurver med ordinater  $\neq 0$  er optegnet).

Bestemmelse af elasticitetsligningens konstanter  $\delta_{aa}$  og  $\delta_{a0}$  sker ved benyttelse af de sædvanlige integrationsformler fra [11].

$$\begin{aligned}
\delta_{aa} &= \int \frac{M_a^2}{EI} ds + \int \frac{V_a^2}{GI_V} ds \quad \text{over hele systemet} \\
&= \frac{1}{EI_L} \cdot \left( 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 0,522^2 + \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 1,044^2 \right) + \frac{1}{GI_V} \cdot 2 \cdot 12 \cdot 0,5^2 \\
&\quad + \frac{1}{EI_T} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (1^2 + 1 \cdot 0,478 + 0,478^2) \\
&= \frac{6,54}{EI_L} + \frac{6,00}{GI_V} + \frac{3,41}{EI_T} = \frac{17,12}{EI_0}
\end{aligned}$$

idet de på fig. 44 angivne værdier indsættes.

$$\begin{aligned}
\delta_{a0} &= \int \frac{M_a M_0}{EI} ds + \int \frac{V_a V_0}{GI_V} ds \quad \text{over hele systemet} \\
&= \frac{1}{EI_L} \cdot \left( 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 0,522 \cdot 65 + \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot (-1,044) \cdot 170 \right) \\
&\quad + \frac{1}{EI_T} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot (-1 - 2 \cdot 0,478) \cdot 65 \\
&= - \frac{438}{EI_L} - \frac{127,1}{EI_T} = - \frac{195,5}{EI_0}
\end{aligned}$$

Herefter fås

$$X_a = - \delta_{a0} : \delta_{aa} = \underline{11,42 \text{ kNm}}$$

Den resulterende reaktionsfordeling bliver således

$$R_A = R_C = 21,74 + 0,174 \cdot 11,42 = 23,73 \text{ kN}$$

$$\text{og } R_B = 56,52 - 0,348 \cdot 11,42 = 52,55 \text{ kN}$$

Sluttelig bemærkes, at parameteren  $k_V$  ( $ka^2$ ) for den betragtede konstruktion er

$$\frac{k_V}{ka^2} = \frac{\frac{4GI_V}{L}}{\frac{48EI_L}{L^3} \cdot a^2} = \frac{G}{12E} \cdot \frac{I_V}{I_L} \cdot \left( \frac{L}{a} \right)^2 = 0,10$$

hvilket kan tjene til sammenligning med skemaet i fig. 40.

Som eksempel på vridningsstivhedens betydning er på fig. 47 optegnet reaktionen fra yderbjælken i det viste system, når (tvær-)stivhedstallet  $C$  og vridningsparameteren  $k_V:(ka^2)$  varierer. For små værdier af  $k_V:(ka^2)$  henvises til fig. 48.

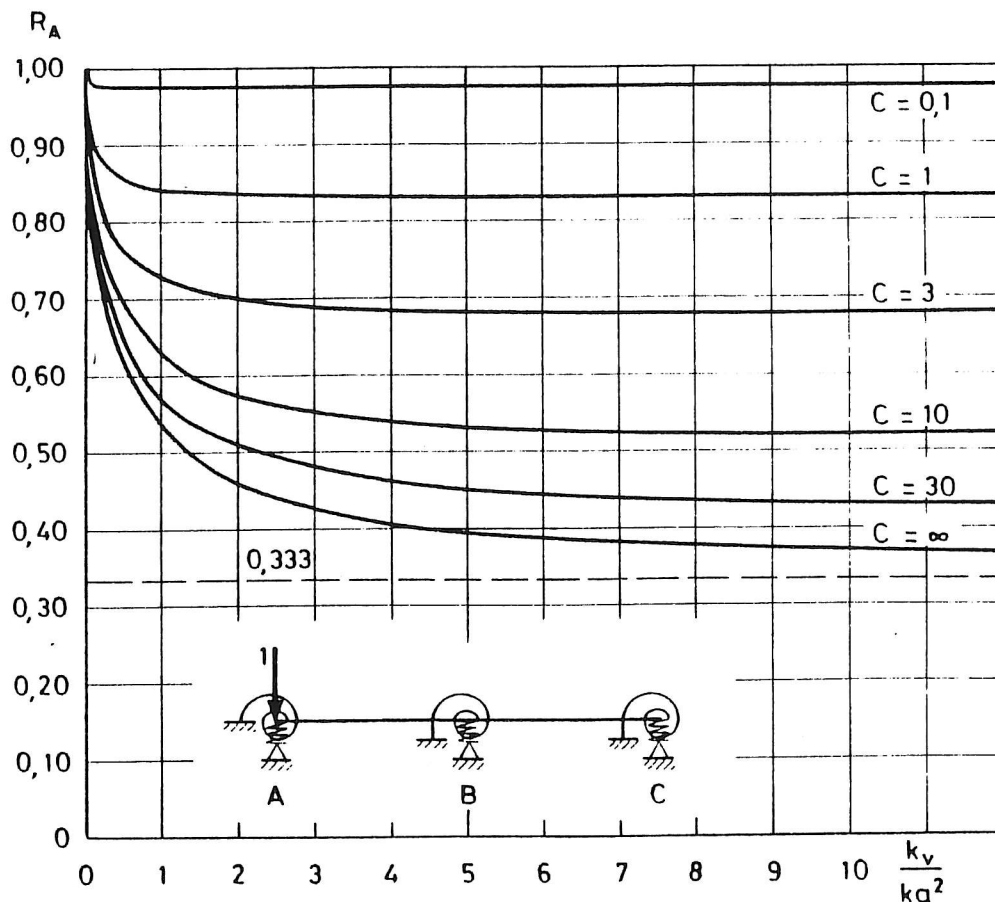


Fig. 47. Indflydelse af tværstivhed og vridningsstivhed på lastfordelingen. Se også fig. 48.

Det ses, at det er gunstigt for lastfordelingen, at selv ret små vridningsstivheder medregnes (f.eks. svarende til hvad der kan opnås med et rektangulært tværsnit med  $h:b = 4$ ). Til gengæld får man ikke noget særligt ud af at øge vridningsstivheden ud over en vis grænse.

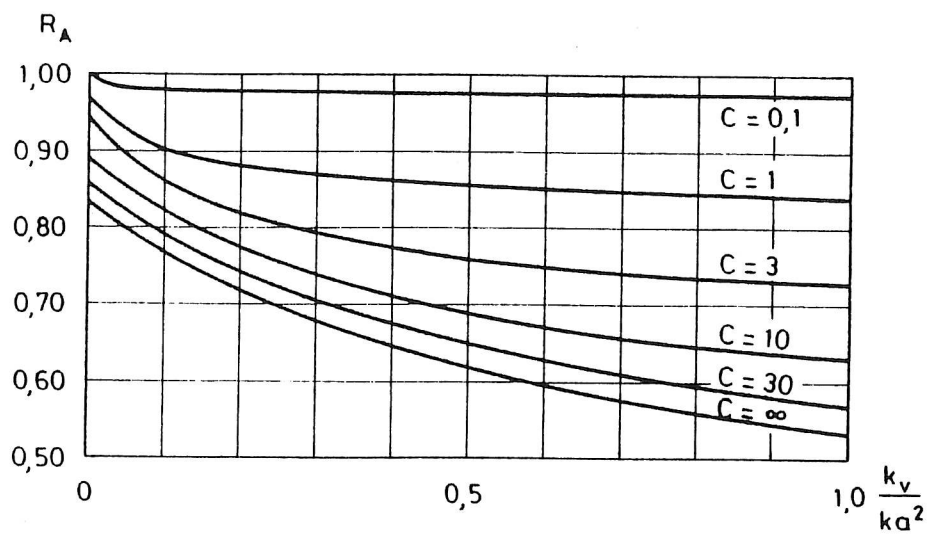


Fig. 48. Supplement til fig. 47 for  $\frac{k_V}{k_a^2} \leq 1$ .

### RISTEVÆRK BEREGNET SOM EN ORTOTROP PLADE

Virkemåden af et risteværk minder meget om virkemåden af en plade. Det er derfor nærliggende at tænke sig beregningen af et risteværk erstattet med beregning af en ækvivalent plade, så man bliver i stand til at udnytte de fra pladeteorien kendte resultater.

Navnlig før edb-maskinernes fremkomst var dette en stor fordel, men også med de nuværende hjælpemidler til gennemførelse af en numerisk beregning kan metoder, der bygger på ovennævnte ide, have deres berettigelse, f.eks. i forbindelse med overslagsberegninger.

I almindelighed vil stivheden af et risteværk være forskellig i dets længde- og tværretning, og det samme må derfor gælde for den ækvivalente plade, der hermed bliver anisotrop. Svarende til et lige risteværk med retvinklet (ortogonal) skæring mellem hoved- og tværbjælker, skal pladen være ortogonalt anisotrop, med en kortere benævnelse ortotrop.

Beregningen af en ortotrop plade kan enten ske numerisk ved hjælp af elementmetoden eller ved løsning af pladens differentiaalligning. Her skal der kun gås nærmere ind på sidstnævnte, idet det er denne metode, der egner sig bedst til overslagsberegninger.

Teorien for ortotrope plader baserer sig på de samme statiske og geometriske betingelser som isotrope plader, hvorimod de konstitutive betingelser er anderledes, idet de skal tage hensyn til forskellige egenskaber i pladens to hovedretninger.

Med de samme betegnelser<sup>\*)</sup> som i [12] og [13], se også fig. 49, er nedenfor angivet differentiaalligningen og forskellige momentudtryk for henholdsvis en isotrop og en ortotrop plade.

Isotrop plade: (se [12] side 40)

Pladens differentiaalligning:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p_z \quad (10)$$

---

\*) Bemærk, at der er benyttet et andet koordinatsystem andre steder i dette kompendium.



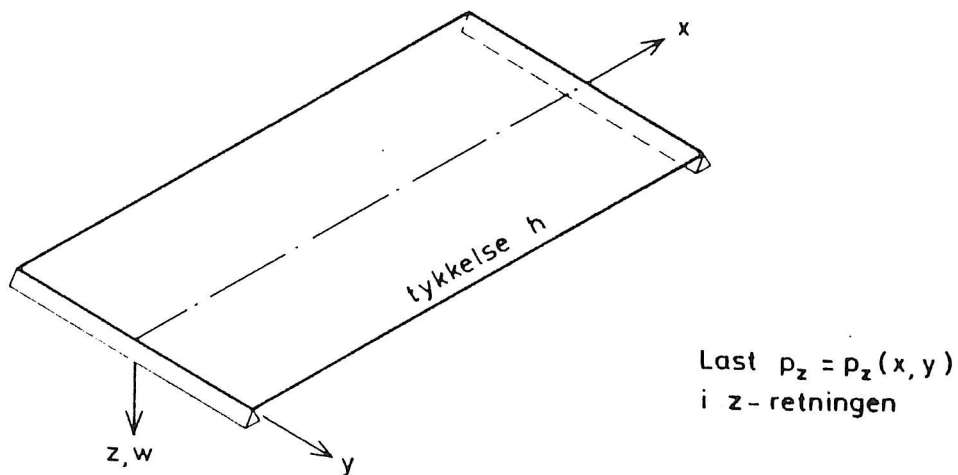


Fig. 49. Benyttet koordinatsystem.

$$\text{hvor } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Momenter

$$m_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\begin{aligned} m_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Ortotrop plade: (se f.eks. [14])

Pladens differentialligning:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P_z \quad (11)$$

$$\text{hvor } D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}$$

$$2H = 4C + \nu_y D_x + \nu_x D_y$$

$$\text{og } 2C = (1 - \sqrt{\nu_x \nu_y}) \sqrt{D_x D_y}$$

$D_x$  og  $D_y$  er bøjningsstivheden i henholdsvis x- og y-retningen.  
H er den "effektive" vridningsstivhed.

Momenter

$$m_x = -D_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \nu_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$m_y = -D_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \nu_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$m_{xy} = -2C \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

For  $E_x = E_y$  og  $\nu_x = \nu_y$  ses udtrykkene for den ortotrope plade at gå over i de tilsvarende for den isotrope plade.

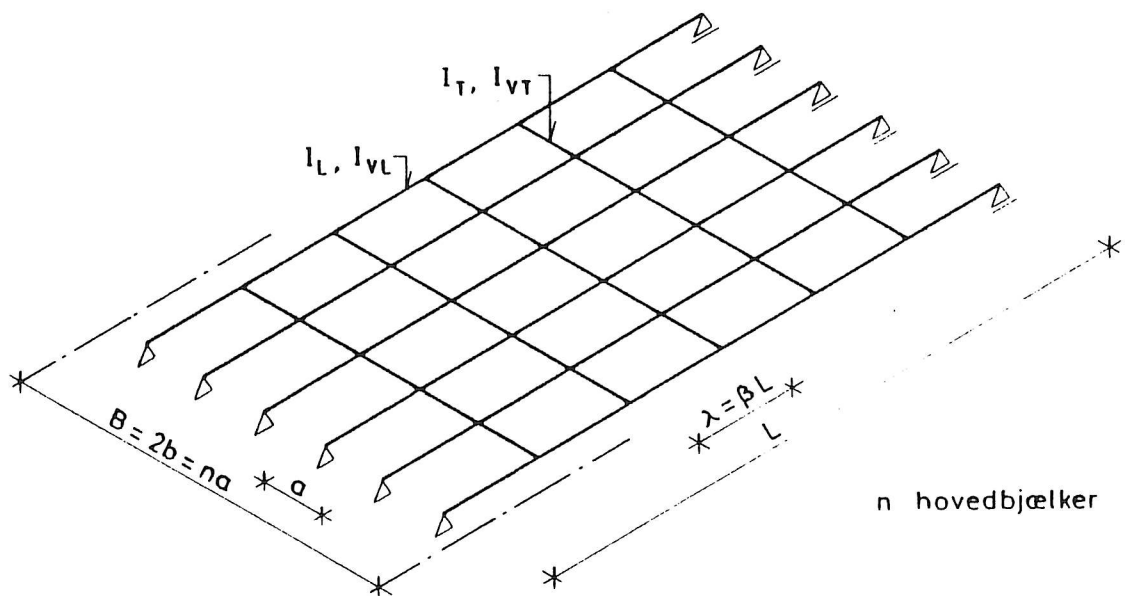


Fig. 50. Risteværk med bøjnings- og vridningsstive bjælker i begge retninger.

Risteværk se fig. 50 samt [14]

Ved at opstille ligevægten for et typisk skæringspunkt mellem

en hovedbjælke og en tværbjælke samt udtrykke sammenhængen mellem flytninger og snitkræfter fås følgende differentiaalligning for risteværket

$$\frac{EI_L}{a} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + G \left( \frac{I_{VL}}{a} + \frac{I_{VT}}{\lambda} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{EI_T}{\lambda} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P_z \quad (12)$$

Ved sammenligning med differentiaalligningen for den ortotrope plade ses dette at svare til, at man sætter

$$\begin{aligned} v_x &= v_y = 0 \\ D_x &= \frac{EI_L}{a} = Ei_L ; & D_y &= \frac{EI_T}{\lambda} = Ei_T \quad \text{samt} \\ 2H &= G \left( \frac{I_{VL}}{a} + \frac{I_{VT}}{\lambda} \right) = G(i_{VL} + i_{VT}) \end{aligned}$$

idet størrelserne  $i_L$ ,  $i_T$ ,  $i_{VL}$  og  $i_{VT}$  betegner inertimomenter pr. længdeenhed målt vinkelret på bjælkerne i risteværkets plan.

I stedet for at karakterisere den ortotrope plade ved  $D_x$ ,  $D_y$  og  $H$  kan man indføre bøjningsparameteren  $\vartheta$  og vridningsparameteren  $\alpha$ , der begge er dimensionsløse. De defineres således:

$$\vartheta = \frac{b}{L} \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} = \frac{b}{L} \sqrt{\frac{i_L}{i_T}} = \frac{b}{L} \sqrt{\frac{I_L}{I_T} \cdot \frac{\lambda}{a}}$$

$$\alpha = \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{G(i_{VL} + i_{VT})}{2E\sqrt{i_L \cdot i_T}}$$

hvor  $b = \frac{1}{2} na$  og  $n =$  antal hovedbjælker

svarende til, at pladen regnes at have en fiktiv bredde på  $B = na$ , se fig. 50. (Hvis man ikke indførte dette lille kunstgreb, ville stivhederne  $i_L$  og  $i_V$  jo ikke afspejle de virkelige forhold).

$\alpha = 0$  ses at svare til et risteværk med vridningsslappe hoved- og længdebjælker.

$\alpha = 1$  svarer til den isotrope plade, dvs. størst mulig vridningsstivhed ( $H = \sqrt{D_x D_y} = D$ , jfr. side 56-57).

For et simpelt understøttet risteværk ses forbindelsen mellem parameteren  $\vartheta$  og det tidligere definerede stivhedstal  $C$  (side 24) at være, idet  $\lambda = \beta \cdot L$ :

$$\vartheta^4 = \left(\frac{na}{2L}\right)^4 \cdot \frac{I_L}{I_T} \cdot \frac{\beta L}{a} = \frac{n^4 \beta}{16} \cdot \frac{I_L}{I_T} \cdot \left(\frac{a}{L}\right)^3 = \frac{n^4 \beta}{16} \cdot \frac{1}{C}$$

Differentialligningen (12) gælder generelt, og den beskrevne metode kan derfor benyttes med forskellige randbetingelser. Dette indebærer bl.a., at også kontinuerlige risteværker kan beregnes ad denne vej.

#### Guyon-Massonet's metode

Metoden er nærmere beskrevet i [13] og [14].

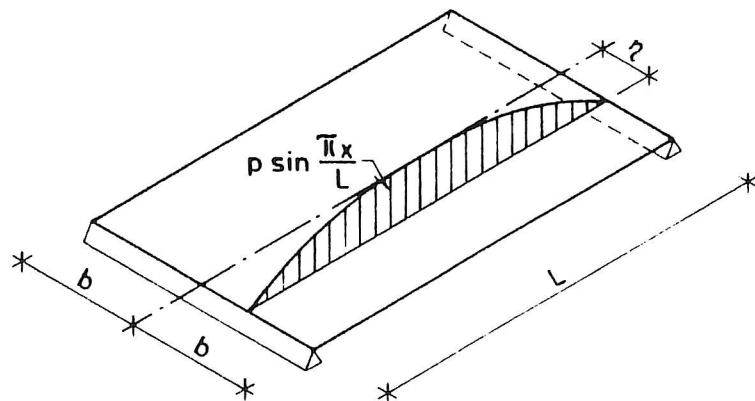


Fig. 51. Ortotrop plade med sinusformet linielast. ( $m = 1$ ).

Y. Guyon og C. Massonet har løst (12) for en sinusfordelt last  $p_z = p_m \sin(m\pi x:L)$  i afstanden  $y$  fra risteværkets midtlinie. På fig. 51 er vist situationen svarende til  $m = 1$ . Beregningerne er gennemført for varierende  $\vartheta$  med  $\alpha = 0$  og  $\alpha = 1$ . Ved omsætningen af resultaterne til praktisk brug er der indført følgende forudsætninger:

- Længdebjælkernes nedbøjninger er affine; dette vil da også gælde for deres krumninger og momenter. Hermed kan last-

fordelingen karakteriseres ved forholdet mellem den enkelte bjælkes nedbøjning  $w$  f.eks. ved fagmidten og den gennemsnitlige nedbøjning  $w_0$  ved fagmidten. Dette forhold viser sig med god tilnærmelse at være det samme for alle sinuslaster.

- Andre laster kan fordeles på samme måde som de sinusfordelte laster uanset deres ekscentricitet og placering i forhold til understøtningerne. Dette følger umiddelbart af, at en vilkårlig lastfunktion kan opfattes som en sum af sinusfordelte laster (Fourier-udvikling).

Lastfordelingsfaktoren  $K = w:w_0$  er da den samme for alle lasttyper og afhænger for en aktuel værdi af  $\vartheta$  og  $\alpha$  kun af lastens ekscentricitet  $\eta$  samt ekscentriciteten af den betragtede bjælke, se fig. 52, der viser det generelle tilfælde, en vilkårligt placeret punktlast. Momentet i bjælken bliver simpelthen

$$M_{xf} = K(f, \eta) \cdot M_{x0} \quad (13)$$

hvor  $M_{x0}$  er det moment, der skulle optages, hvis lasten var fordelt ligeligt mellem bjælkerne. Bemærk, at man p.gr.a. Maxwell's sætning har  $K(f, \eta) = K(\eta, f)$ .

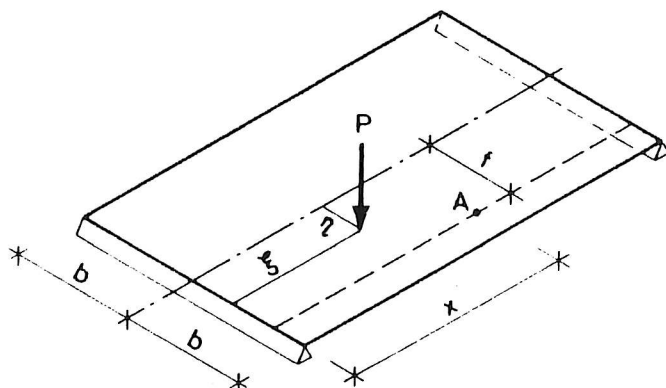


Fig. 52. Generel lastsituation. Momentet i punkt A søges.

I [13] er der optegnet diagrammer for lastfordelingsfaktorerne

$K_0$  og  $K_1$  svarende til  $\alpha = 0$  og  $\alpha = 1$ . Værdierne er angivet for bjælkeplacering  $f = 0; 0,25 b; 0,50 b; 0,75 b$  og  $b$  samt for lastekscentricitet  $\eta = 0; \pm 0,25 b; \pm 0,50 b; \pm 0,75 b$  og  $\pm b$ . Enkelte af diagrammerne er gengivet på fig. 55 - 58.

For værdier  $0 < \alpha < 1$  benyttes interpolationsformlen

$$K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0) \sqrt{\alpha} \quad (14)$$

Metoden giver ikke nogen anvisning på bestemmelse af længdebjælkernes vridningsmomenter; dette spørgsmål vendes der tilbage til i forbindelse med taleksempel 6.

Bøjningsmomenterne i tværbjælkerne for en punktlast  $P$  fås ud fra udtrykket

$$m_y = \mu_\alpha \frac{2Pb}{L} \cdot \sin \frac{\pi x}{L} \quad (15)$$

Her er  $m_y$  momentet pr. længdeenhed og  $\mu_\alpha$  en faktor der findes ved en interpolationsformel svarende til (14):

$$\mu_\alpha = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0) \cdot \sqrt{\alpha} \quad (16)$$

Størrelserne  $\mu_0$  og  $\mu_1$  svarer til  $\alpha = 0$  hhv.  $\alpha = 1$  og er for en aktuel  $\vartheta$ -værdi kun afhængige af ekscentriciteterne  $f$  og  $\eta$ . De er tabelleret i [13].

Nøjagtigheden af resultaterne efter formel (15) er ikke særlig god, og den bør derfor kun bruges til et overslag over maksimale momenter i tværbjælkerne. I [17] foreslås at sætte

$$m_y = \frac{Pb}{2L} \cdot (\mu_0 \sin \frac{\pi x}{L} - \mu_3 \sin \frac{3\pi x}{L} + \mu_5 \sin \frac{5\pi x}{L}) \quad (17)$$

Dette giver noget bedre resultater, men metoden er hermed ret besværlig. Til nøjere bestemmelse af tværmomenterne må derfor anbefales en elementmetodeberegning af risteværket, eventuelt som ortotrop plade.

Generelt kan det siges, at Guyon-Massonet's metode er bedst egnet til relativt smalle risteværker (lille forhold  $B:L$ ) med mange hoved- og tværbjælker. Den kan dog også med rimelig nøjagtighed benyttes for broer med ret få bjælker, hvilket senere

demonstreres i et taleksempel.

Bestemmelsen af længdebjælkernes bøjningsmomenter efter Guyon-Massonet's metode giver resultater med god nøjagtighed. Umiddelbart skulle man synes, at det samme måtte være tilfældet for forskydningskræfterne, men her spiller det ind, at medens momenterne fremkommer ved to gange differentiation af den antagne udbøjningsflade, jfr. side 57, fås forskydningskræfterne ved yderligere en differentiation, hvilket er ensbetydende med tab af nøjagtighed. Dette forhold forstærkes af, at de maksimale forskydningskræfter fås for lastopstillinger nær understøtningerne, hvilket giver dårligere lastfordeling, end når last (og tværbjælker) er anbragt ved fagmidten.

#### Taleksempel 6

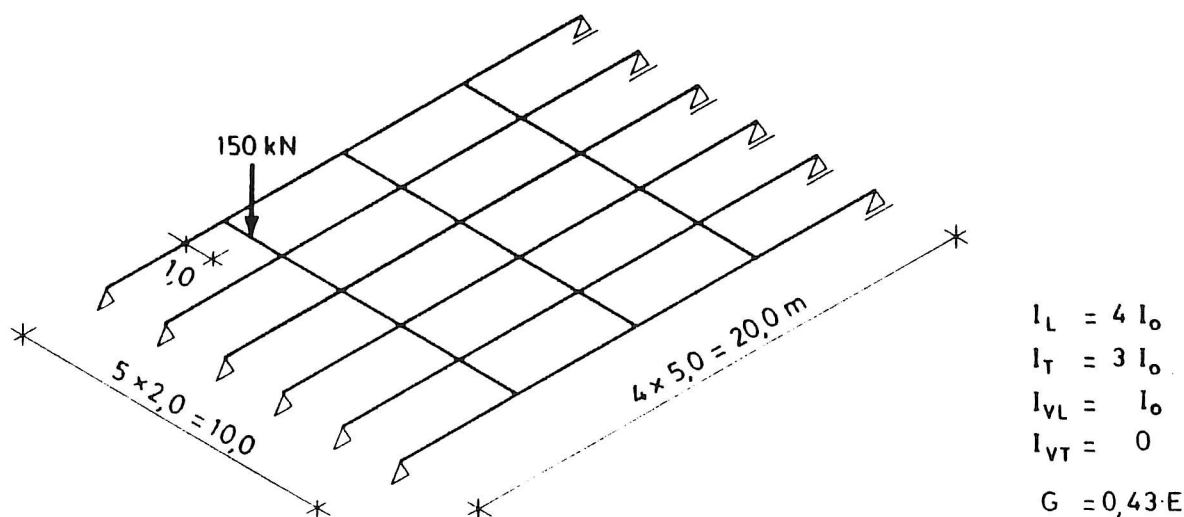


Fig. 53. Taleksempel 6. Risteværkets geometri og belastning.

Bredden  $b$  af den ækvivalente, ortotrope plade bestemmes af

$$2b = n \cdot a = 6 \cdot 2,0 = 12,0 \text{ m}$$

Bøjningsparameteren

$$\vartheta = \frac{b}{L} \sqrt{\frac{I_L}{I_T} \cdot \frac{\lambda}{a}} = \frac{6,0}{20,0} \cdot \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{5,0}{2,0}} = 0,40$$

Vridningsparameteren

$$\alpha = \frac{G}{2E} \cdot \frac{i_{VL} + i_{VT}}{\sqrt{i_L \cdot i_T}} = \frac{0,43}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2,0} + \frac{0}{5,0}}{\sqrt{\frac{4}{2,0} \cdot \frac{3}{5,0}}} = 0,10$$

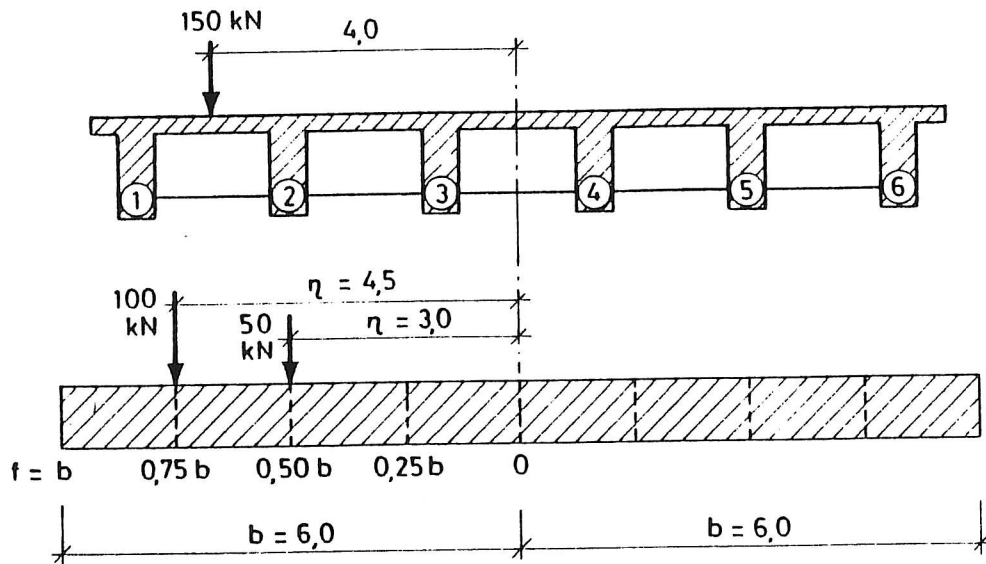


Fig. 54. Taleksempel. Ækvivalent, ortotrop plade med ækvivalent last. Mål i m.

Lasten ækvivaleres med 2 punktlaster placeret i afstanden  $0,50b = 3,0$  m og  $0,75b = 4,5$  m fra midtlinien, se fig. 54, for at kunne udnytte standardpositionerne i diagrammerne. Disse er optegnet som influenslinier for virkningen i en bestemt afstand  $f$  fra midtlinien, men kan også p.gr.a. Maxwell's sætning opfattes som fordelingen af  $m:m_0 = w:w_0$  for en bestemt lastposition.

Med henvisning til fig. 55 - 58 fås de lastfordelingsfaktorer, der er tabelleret side 66 samt anskueliggjort på fig. 59, hvor også omsætningen af resultaterne til det virkelige risteværk er antydnet.



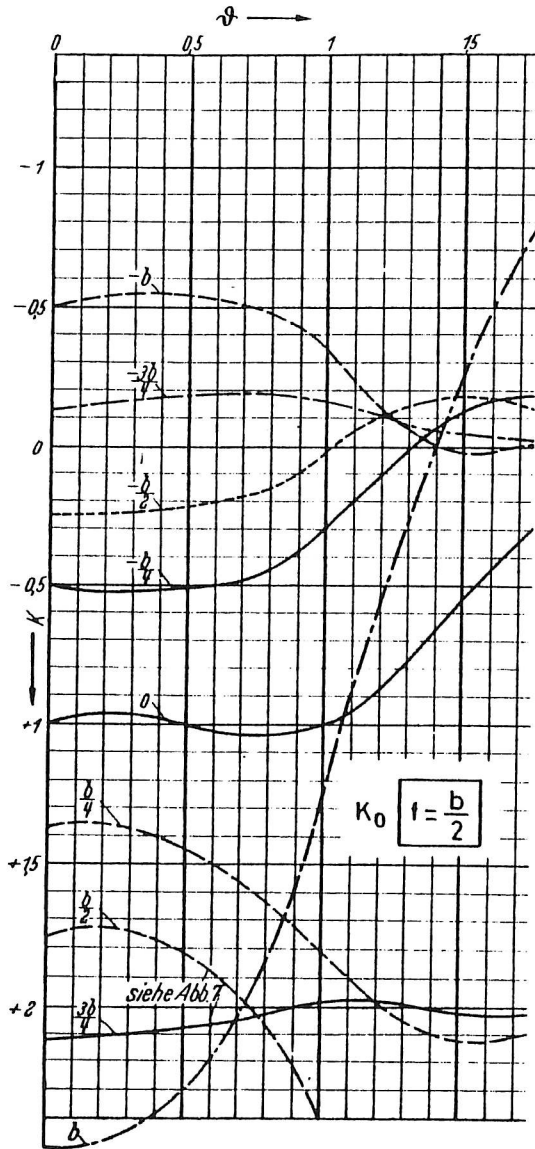


Fig. 55. Lastfordelingsfaktor  $K_0$  for bjælke beliggende  $f = \frac{b}{2}$  fra midtlinien. Kilde: [13].

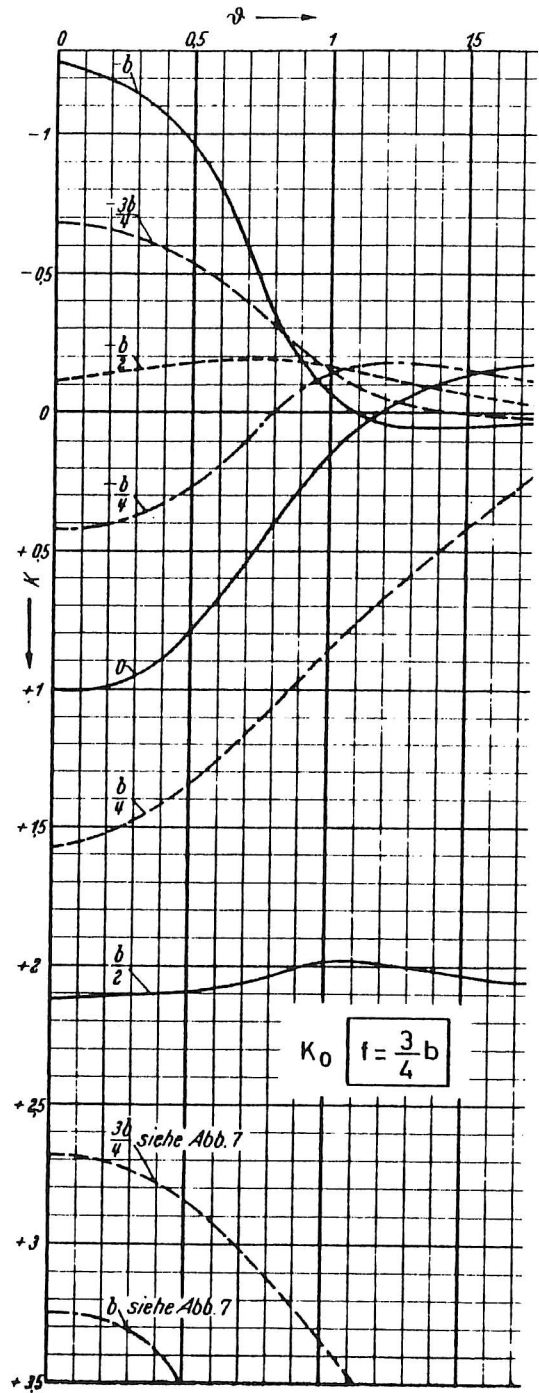


Fig. 56. Lastfordelingsfaktor  $K_0$  for bjælke beliggende  $f = \frac{3}{4} b$  fra midtlinien. Kilde: [13].

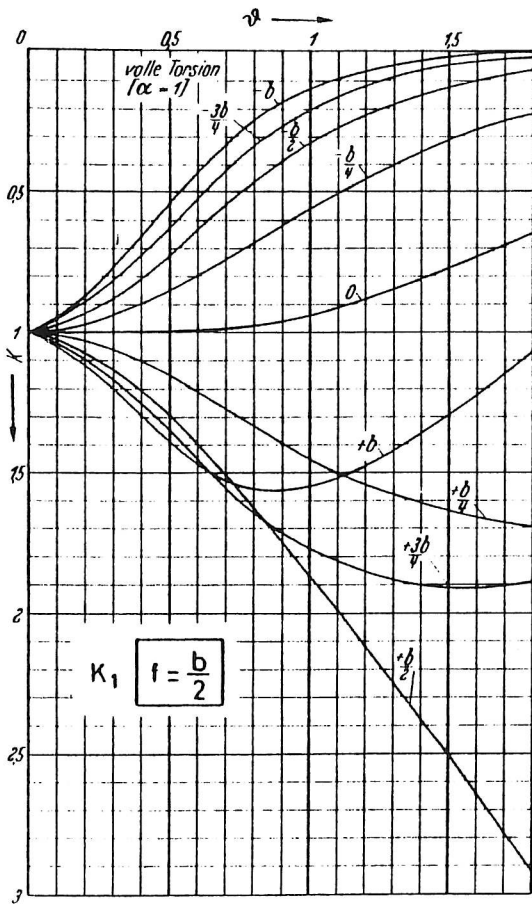


Fig. 57. Lastfordelingsfaktor  $K_1$  for bjælke beliggende  $f = \frac{b}{2}$  fra midtlinien. Kilde: [13].

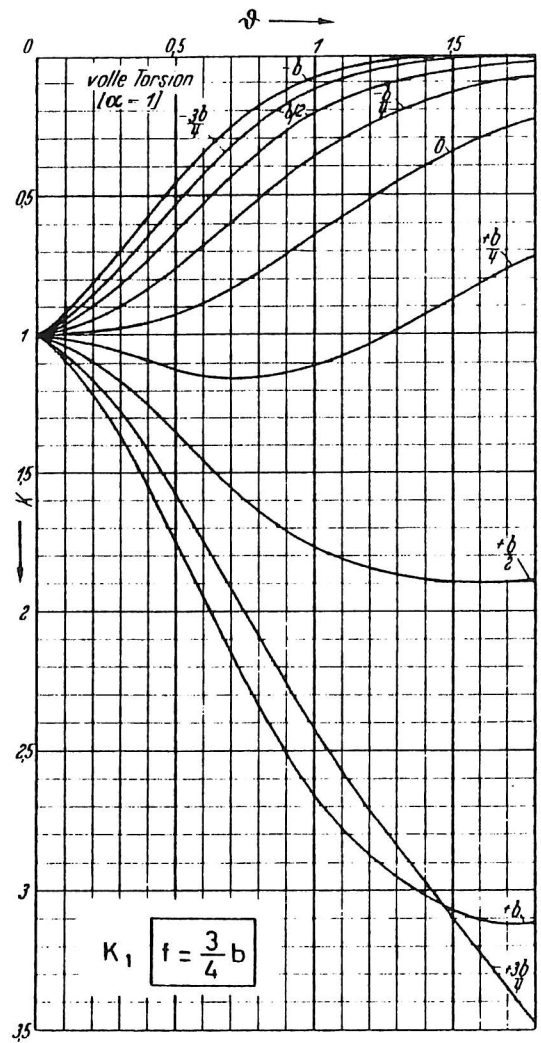
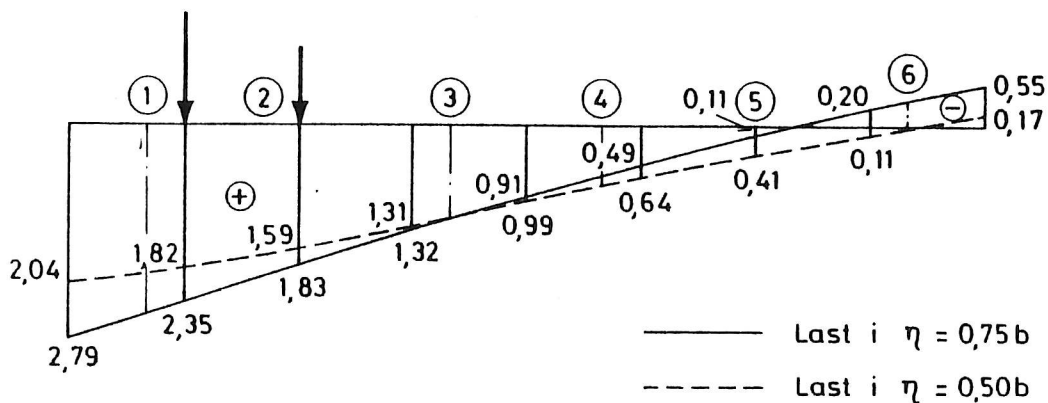


Fig. 58. Lastfordelingsfaktor  $K_1$  for bjælke beliggende  $f = \frac{3}{4} b$  fra midtlinien. Kilde: [13].

$\vartheta = 0,40$ $\alpha = 0,10$	Bjælkeplacering									
	$f = b$	$0,75b$	$0,50b$	$0,25b$	$0$	$-0,25b$	$-0,50b$	$-0,75b$	$-b$	
$\eta = 0,75b$	$K_0$	3,37	2,78	2,10	1,42	0,89	0,33	-0,17	-0,59	-1,07
	$K_1$	1,55	1,42	1,25	1,09	0,96	0,84	0,73	0,65	0,58
	$K_\alpha$	2,79	2,35	1,83	1,32	0,91	0,49	0,11	-0,20	-0,55
$\eta = 0,50b$	$K_0$	2,38	2,09	1,77	1,40	0,98	0,52	0,23	-0,17	-0,55
	$K_1$	1,29	1,25	1,20	1,10	1,00	0,90	0,81	0,73	0,66
	$K_\alpha$	2,04	1,82	1,59	1,31	0,99	0,64	0,41	0,11	-0,17

TABEL. Lastfordelingsfaktorer.

Fig. 59. Lastfordelingsfaktorer  $K_\alpha$ .

Svarende til, at summen af påvirkningerne på længdebjælkerne skal være lig den ydre last, fås som regnekontrol

$$\frac{1}{2b} \int_{-b}^b K_\alpha dy = 1$$

Integrationen foretages let ved hjælp af Simpson's arealformel. Her fås resultaterne  $0,99$  og  $0,97 \sim 1$ .

Ved interpolation på fig. 59 bestemmes lastfordelingsfaktorerne for de virkelige positioner af bjælkerne. Beregningen af lastfordelingen på de 6 bjælker forløber herefter således:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (100 \cdot 2,50 + 50 \cdot 1,90) : 6 = 58 \text{ kN} \\
 P_2 &= (100 \cdot 1,83 + 50 \cdot 1,59) : 6 = 44 - \\
 P_3 &= (100 \cdot 1,18 + 50 \cdot 1,20) : 6 = 30 - \\
 P_4 &= (100 \cdot 0,63 + 50 \cdot 0,76) : 6 = 17 - \\
 P_5 &= (100 \cdot 0,11 + 50 \cdot 0,41) : 6 = 5 - \\
 P_6 &= (-100 \cdot 0,32 + 50 \cdot 0,02) : 6 = -5 -
 \end{aligned}$$

$$\sum P = 149 \text{ kN} \approx 150$$

På fig. 60 er den fundne lastfordeling anskueliggjort.

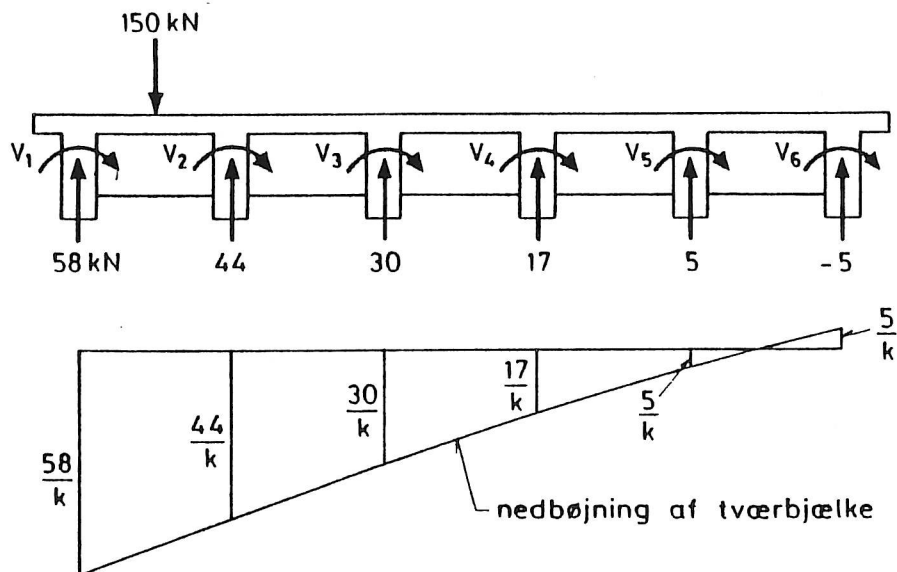


Fig. 60. Taleksempel. Resulterende lastfordeling.  
 $k$  = fjederkonstant.

Ved at tage moment om midten af risteværket, ses det, at det samlede vridningsmoment, der skal overføres til hovedbjælkerne, er

$$\begin{aligned}
 \sum V &= 150 \cdot 4,0 - (58+5) \cdot 5,0 - (44-5) \cdot 3,0 - (30-17) \cdot 1,0 \\
 &= 155 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

forudsat at kun den direkte belastede tværbjelke har betydning for lastfordelingen. Dette er omtrent rigtigt her, da  $\vartheta$  er

lille  $\Rightarrow$  C stor (= 750).  $\Sigma V$  fordeles på hovedbjælkerne svarende til disses vinkeldrejninger. Med støtte i nederste del af fig. 60 skønnes fordelingen at være

$$\begin{array}{ll} V_1 \approx 31 \text{ kNm} & V_2 \approx 29 \text{ kNm} \\ V_3 \approx 27 \text{ kNm} & V_4 \approx 25 \text{ kNm} \\ V_3 \approx 23 \text{ kNm} & V_2 \approx 20 \text{ kNm} \end{array}$$

Herefter kan det største positive hhv. negative moment i tværbjælken beregnes. Under samme forudsætning som ovenfor (at kun den direkte belastede tværbjælke medvirker i lastfordelingen) fås for den midterste tværbjælke

$$M_T^+ = 58 \text{ kNm} \quad \text{under punktlasten og}$$

$$M_T^- = -79 \text{ kNm} \quad \text{ved bjælke 4.}$$

Til sammenligning anføres resultatet af en beregning efter (15). Svarende til den aktuelle lastplacering fås ved interpolation mellem de i [13] anførte værdier

$$\mu_\alpha^+ = 0,08 \quad \text{og} \quad \mu_\alpha^- = -0,09$$

og dermed

$$m_Y^+ = 0,08 \cdot \frac{2 \cdot 150 \cdot 6,0}{20} \cdot \sin \frac{\pi x}{20} = 7,2 \sin \frac{\pi x}{20}$$

$$m_Y^- = -0,09 \cdot \frac{2 \cdot 150 \cdot 6,0}{20} \cdot \sin \frac{\pi x}{20} = -8,1 \sin \frac{\pi x}{20}$$

Påvirkningen på den midterste tværbjælke fås ved integration over strækningen  $7,5 \leq x \leq 12,5$ . Resultatet bliver

$$M_T^+ = 7,2 \cdot 0,244 \cdot 20 = 35 \text{ kNm}$$

$$M_T^- = -8,1 \cdot 0,244 \cdot 20 = -40 \text{ kNm}$$

Påvirkningen på hver af de 2 andre tværbjælker fås ved integration over strækningen  $2,5 \leq x \leq 7,5$ . Resultat:  $M_T^+ = 25 \text{ kNm}$  og  $M_T^- = -28 \text{ kNm}$ .

Til belysning af beregningsmetoden skal yderligere anføres, at man, når den benyttes på konstruktionen i taleksempel 2, får følgende resultater, jfr. fig. 20:

$$\begin{aligned} \max. M_1 &= 2,5 P \\ \max. M_2 &= 1,5 P \\ \text{og } \max. M_1 &= 0,5 P \end{aligned}$$

Guyon-Massonet's metode kan uden vanskeligheder benyttes for risteværker med kontinuerlige eller indspændte hovedbjælker. Der indføres blot et ækvivalent inertimoment  $I_{Le}$  af hovedbjælkerne bestemt ved  $I_{Le} = \kappa \cdot I_L$  hvor

$\kappa = f_0 : f =$  forholdet mellem nedbøjningen af en tænkt, simpelt understøttet hovedbjælke og nedbøjningen af en hovedbjælke med de aktuelle understøtningsforhold. (Jfr. f.eks. skemaet i fig. 24, hvor man for den dobbeltsidigt indspændte bjælke vil få  $\kappa = 192 : 48 = 4,0$ ).

For det risteværk, der er behandlet i taleksempel 3, se fig. 33 og 34, fås

$$\kappa = 110 : 48 = 2,3$$

og dermed

$$\vartheta = \frac{b}{L} \cdot \sqrt[4]{\kappa \cdot \frac{I_L}{I_T} \cdot \frac{\lambda}{a}} = \frac{1,5 \cdot 2,5}{12} \cdot \sqrt[4]{2,3 \cdot 8 \cdot \frac{6}{2,5}} = 0,81$$

Da bjælkerne i dette eksempel er forudsat vridningsslappe, fås  $\alpha = 0$ . Lastfordelingsfaktorerne  $K_0$  findes herefter ved hjælp af [13] til  $K_0 = 1,75$  for midterbjælke og  $K_0 = 0,6$  for yderbjælker. Midterbjælken skal altså regnes belastet med den ydre last  $P$  gange faktoren  $1,75 : 3 = 0,58$ . Herved bliver det maksimale positive moment  $M = 0,203 \cdot 0,58 PL = 0,118 \cdot PL$ , hvilket ses at svare godt til resultatet på fig. 34.

### BRODÆK UDEN LASTFORDELENDE TVÆRBJÆLKER

Af de foregående afsnit fremgår det, at anordning af tværbjælker har en gunstig effekt på lastfordelingen. Ved udførelsen af broens overbygning vil tværbjælker imidlertid ofte være til ulempe for en rationel produktion, og man vil derfor ikke sjældent - især for betonbroer - støde på brodæk uden lastfordelende tværbjælker. Det har derfor væsentlig interesse at udvikle metoder til vurdering af lastfordelingen i sådanne brodæk.

En grov tilnærmelse kan bestå i at betragte brobanepladen som tværbjælke, hvorved beregningen føres tilbage til en af de allerede beskrevne metoder.

Det ligger uden for rammerne af denne fremstilling at gå i detaljer med beregningen af brobanepladen. Her skal blot som optakt til behandlingen af lastfordelingen mellem hovedbjælkerne beskrives nogle af de forhold, der gør sig gældende ved pladedimensioneringen. Angående en nøjere beregning af brobanepladen henvises til [18] og [19].

På fig. 61 er antydnet brodækkets deformationer i en typisk lastsituation. Sammenhængen mellem plade og bjælker påtvinger sidstnævnte en vinkeldrejning, hvis størrelse er afhængig af bjælkernes vridningsstivhed. Hvis hovedbjælkerne er fastholdt mod vridning ved deres understøtninger, vil den nævnte vinkeldrejning variere langs bjælkerne, og dermed vil også pladens indspændingsmomenter variere. Størst vil de være ved hovedbjælkernes understøtninger, hvor pladen har næsten fuld indspænding. Herved bliver indspændingsmomenterne ofte så generende store, at andre løsninger foretrækkes, f.eks. at undlade vridningsfastholdelse af hovedbjælkerne; samtidig må lejerne udformes, så der tillades sideflytninger ved disse, jfr. figuren. (Hvis lejerne ikke tillader sideflytninger, bevirker de sammen med den ramme, der dannes af plade og bjælkekroppe, en fastholdelse af hovedbjælkerne mod vridning. Når bjælkehøjden er lille i forhold til bjælkeafstanden, giver dette store sidekræfter på lejerne).

Af fig. 61 fremgår det desuden, at hovedbjælkernes lodrette

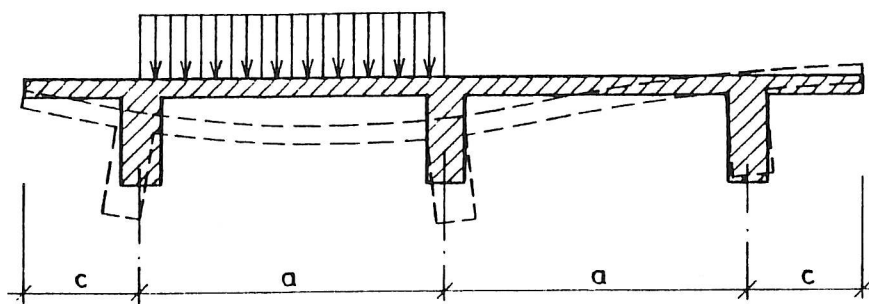


Fig. 61. Deformationer i brodæk uden tværbjælker.

flytninger får indflydelse på pladens krumninger og dermed på momentfordelingen. Da de nævnte flytninger jo varierer langs bjælkerne, vil pladens momenter også gøre det.

For at begrænse vridningsmomenterne i hovedbjælkerne mest muligt kan man som nævnt undlade at fastholde hovedbjælkerne mod vridning ved deres understøtninger. Desuden vælger man i reglen forholdet  $c:a$  mellem længden af udkragningen og bjælkeafstanden således, at der ikke optræder vridende momenter i hovedbjælkerne for hvilende last. Hvis denne er jævnt fordelt, fås  $c = 0,4 a$ .

Af det foranstående fremgår det, at en korrekt beregning af brobanepladen er en kompliceret opgave. I reglen gøres der da også en række tilnærmelser som f.eks. at se bort fra a) pladens bøjningsstivhed i broens længderetning, b) dens vridningsstivhed samt c) bjælkekroppenes vandrette bøjningsstivhed. Desuden ses bort fra eventuel tværsnitshvælvning af hovedbjælkerne.

Et godt overblik over beregningen af brodækket fås ved at benytte en fremgangsmåde, der er analog til den, der benyttedes for risteværker med last uden for tværbjælkerne: Først beregnes påvirkningerne i pladen under antagelse af, at bjælkerne er ueftergivelige, både over for flytning og over for drejning. Hertil behøves nogle fiktive tvangskræfter og -momenter. Dernæst påvirkes det samlede system af disse kræfter og momenter med modsat fortegn. Som hjælpemiddel kan f.eks. benyttes [20].



### Lastfordeling i brodæk med 2 hovedbjælker

Brotværsnittet med kun 2 hovedbjælker er det almindeligst anvendte og vil derfor blive lagt til grund for fremstillingen i dette afsnit.

På fig. 62 er vist den generelle lastsituation ved starten af 2. beregningsetape, dvs. det stadium hvor laster fra brobanen er fordelt ud til bjælkerne under forudsætning af, at disse er ueftergivelige, evt. også for vridende påvirkninger. Størrelserne  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $M_1$  og  $M_2$  kan desuden omfatte bidrag fra laster, der virker direkte på bjælkerne.

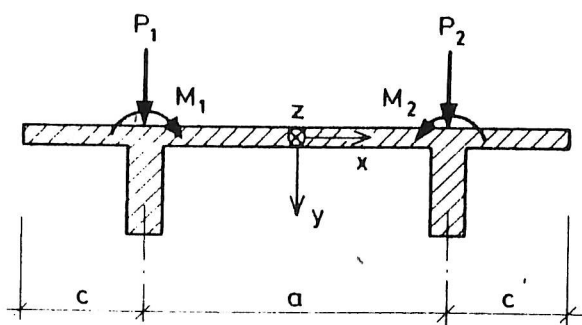


Fig. 62. Laster på systemet.

$P_1$ ,  $P_2$ ,  $M_1$  og  $M_2$  kan være vilkårligt fordelt i broens længderetning. I det følgende forudsættes blot, at de flytninger, som de forårsager i bjælkerne, kan regnes sinusfordelt. Denne tilnærmelse er f.eks. udmærket anvendelig, når lasten hovedsageligt består af punktlaster i nærheden af brofagets midte.

De på fig. 62 viste laster kan på sædvanlig måde opdeles i symmetriske og antimetriske lasttilfælde. Dette er anskueliggjort på fig. 63.

Tilfælde I resulterer i en lodret translation af hele tværsnittet. Idet der, som nævnt side 71, ses bort fra pladens bøjningsstivhed i broens længderetning, indebærer dette tilfælde blot en sædvanlig bjælkeberegning. Fastsettelsen af den med-

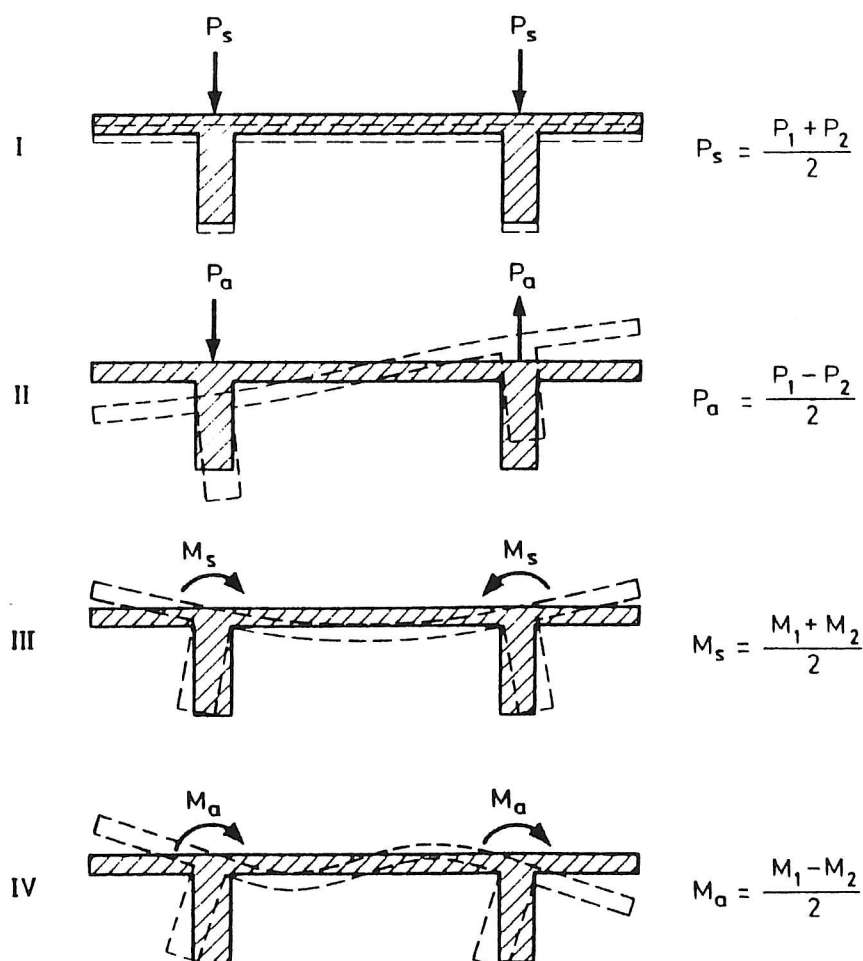


Fig. 63. Opdeling i symmetriske og antimetriske lasttilfælde.

virkende pladebredde kan dog volde problemer. Herom henvises til [21] eller anden speciallitteratur.

Tilfælde II, III og IV medfører allesammen deformationer af brobanepladen og drejning af bjælkerne. Drejningernes størrelse og fordeling langs bjælkerne afhænger af disses stivhed og understøtningsforhold, og det samme gælder derfor også for momentfordelingen i pladen samt de påvirkninger, bjælkerne udsættes for. Kun i de antimetriske tilfælde, II og IV, sker der dog en omfordeling af den lodrette last mellem bjælkerne.

I det følgende indskrænkes fremstillingen til at omfatte det vigtige specialtilfælde, at bjælkerne er simpelt understøttede, og at de er fastholdt mod vridning ved understøtningerne.

Andre understøtningsforhold kan tages i regning på tilsvarende måde.

Tilfælde II: Brobanepladen tænkes opskåret på langs ved midtlinien, se fig. 64. Her vil der af symmetri Grunde kun optræde en forskydningskraft; denne regnes sinusfordelt svarende til den forudsatte udbøjningsform.

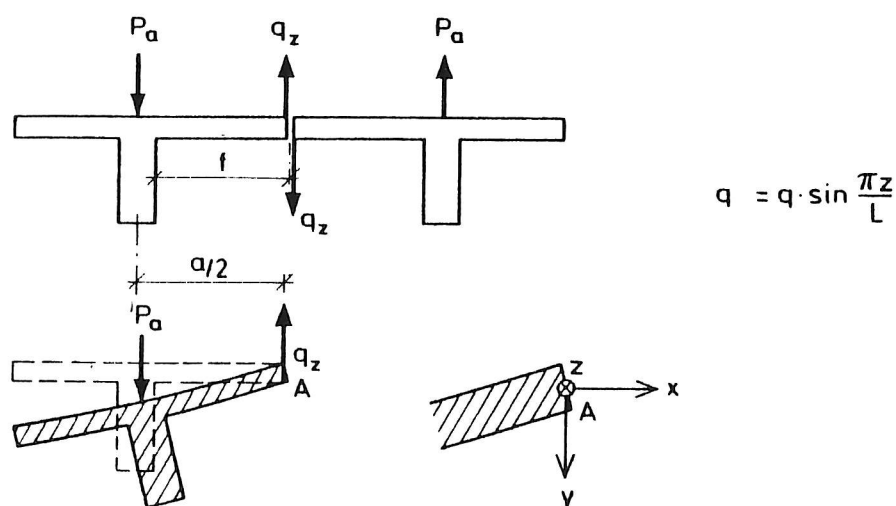


Fig. 64. Tilfælde II, antimetrisk last.

Den lodrette flytning ved A består af følgende 3 bidrag:

$y_{1z}$  fra pladens bøjning pga. lasten  $q_z$

$y_{2z}$  fra bjælkens bøjning pga. lasten  $P_a - q_z$

$y_{3z}$  fra bjælkens drejning pga. momentet  $q_z \cdot \frac{a}{2}$

Beregningen af flytningerne forløber således:

$$y_{1z} = y_1 \sin \frac{\pi z}{L} = - \frac{f^3}{3Ei_{p1}} \cdot q \cdot \sin \frac{\pi z}{L}$$

hvor  $i_{p1}$  er pladens inertimoment pr. længdeenhed.

$$y_{2z} = y_z \sin \frac{\pi z}{L} = \left( \frac{P_a L^3}{\alpha EI_L} - \frac{qL^4}{\pi^4 EI_L} \right) \cdot \sin \frac{\pi z}{L}$$

$$\Rightarrow y_{2z} = \left( \frac{\pi^4}{\alpha} \cdot \frac{P_a}{L} - q \right) \cdot \frac{L^4}{\pi^4 EI_L} \cdot \sin \frac{\pi z}{L}$$

hvor  $\alpha$  fås af de sædvanlige formler for flytninger. F.eks. fås  $\alpha = 48$ , når  $P_a$  er en enkeltkraft ved fagmidten;  $\alpha = 76,8$  når  $P_a$  er jævnt fordelt, og  $\alpha = 2\pi^3$  når  $P_a$  er sinusfordelt. Udtrykket for  $y_{2z}$  kan også opfattes på den måde, at lasten  $P_a$  omskrives til en sinusformet last  $p_{az} = p_a \sin \frac{\pi z}{L}$ , hvor  $p_a = \pi^4 P_a : (\alpha L)$ . Dette vil blive gjort i det følgende.

Vinkeldrejningen  $\theta_z$  beregnes under forudsætning af, at tværsnitshvælvingen kan negligeres. På grund af symmetrien vil vridningsmomentet være nul ved fagmidten, og det er da tilstrækkeligt at betragte den halve bjælke, se fig. 65.

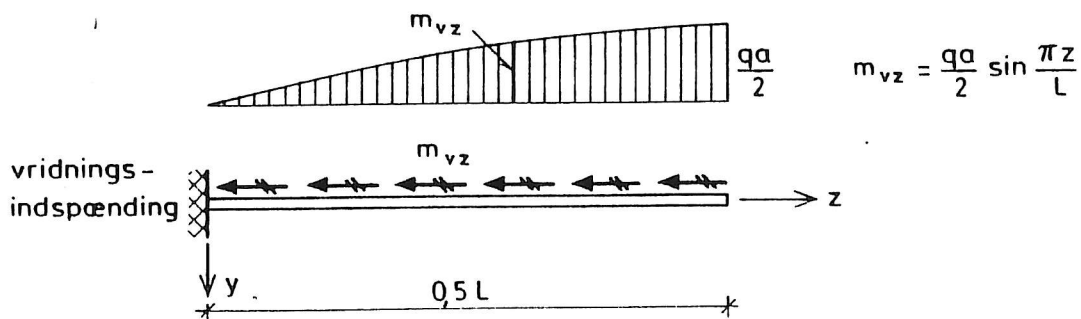


Fig. 65. Vridende momenter fra  $q$ -lasten.

Det vridende snitmoment i bjælken bliver

$$M_{vz} = \int_z^{0,5L} \frac{qa}{2} \cdot \sin \frac{\pi \xi}{L} d\xi = \frac{L}{2\pi} qa \cos \frac{\pi z}{L}$$

Vridningsvinklen  $\theta_z$  fås af

$$\theta_z = \frac{1}{GI_V} \int_0^z \frac{L}{2\pi} qa \cos \frac{\pi \xi}{L} d\xi = \frac{qaL^2}{2\pi^2 GI_V} \cdot \sin \frac{\pi z}{L}$$

$$\Rightarrow y_{3z} = -\theta_z \cdot \frac{a}{2} = -\frac{qa^2 L^2}{4\pi^2 GI_V} \cdot \sin \frac{\pi z}{L}$$

Den samlede flytning ved A skal af symmetrigrunde være nul, og heraf fås et udtryk til bestemmelse af forskydningskraften  $q_z$ :

$$Y_{1z} + Y_{2z} + Y_{3z} = 0$$

$$\Rightarrow \left[ -\frac{f^3}{3E \cdot i_{pl}} \cdot q + \frac{L^4}{\pi^4 EI_L} \cdot (p_a - q) - \frac{qa^2 L^2}{4\pi^2 GI_V} \right] \cdot \sin \frac{\pi z}{L} = 0$$

Når dette skal gælde for alle  $z$ -værdier, dvs. i hele brofaget, fås

$$\max q_z = q = \frac{P_a}{1 + \frac{I_L}{3f \cdot i_{pl}} \cdot \left(\frac{\pi f}{L}\right)^4 + \frac{EI_L}{GI_V} \cdot \left(\frac{\pi a}{2L}\right)^2} \quad (18)$$

Størrelsen  $q:p_a$  er et udtryk for lastfordelingen mellem bjælkerne. Den teoretisk bedste værdi er  $q:p_a = 1$  svarende til, at der ikke skal optages bøjning i bjælkerne for den viste, antisymmetriske last. Når  $q:p_a = 0$ , sker der ingen lastfordeling mellem bjælkerne.

Af formlen for  $q$  ses umiddelbart, hvilke faktorer der har betydning for en god lastfordeling. Denne opnås for

- lille værdi af  $\frac{f}{L}$  og  $\frac{a}{L}$ , dvs. for en smal bro
- stor værdi af  $i_{pl}$ , dvs. stiv plade
- stor værdi af  $\frac{I_V}{I_L}$ , dvs. relativt vridningsstift tværsnit, jfr. side 38.

Når  $q$  er kendt, beregnes bøjningsmomenterne i pladen og vridningsmomenterne i bjælkerne af udtrykkene for  $m_{vz}$  henholdsvis  $M_{vz}$ .

Tilfælde III: Brobanepladen opskæres igen langs midtlinien, se fig. 66. Pladens forskydningskraft i dette snit vil af symmetrigrunde være nul. Plademomentet  $m_z$  regnes sinusfordelt.

Vinkeldrejningen af bjælken udtrykkes nu på 2 måder, hvorved fås en ligning til bestemmelse af  $m$ .

Vinkeldrejning af bjælke, jfr. side 75

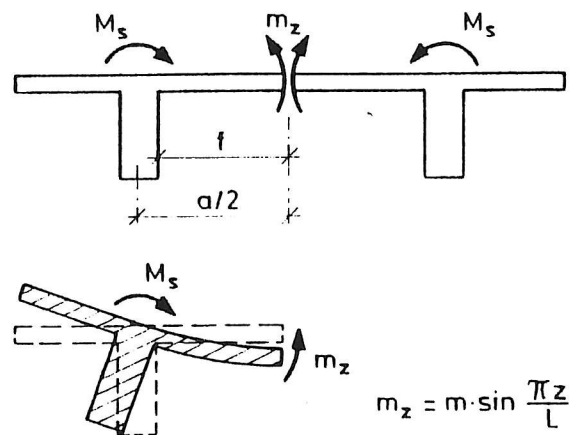


Fig. 66. Tilfælde III, symmetrisk momentlast.

$$\begin{aligned}\theta_{bz} &= \left( \frac{M_s L}{\alpha_V GI_V} - \frac{m \cdot L^2}{\pi^2 GI_V} \right) \cdot \sin \frac{\pi z}{L} \\ &= \left( \frac{\pi^2}{\alpha_V} \cdot \frac{M_s}{L} - m \right) \cdot \frac{L^2}{\pi^2 GI_V} \cdot \sin \frac{\pi z}{L}\end{aligned}$$

hvor  $\alpha_V$  fås af de sædvanlige formler for vinkeldrejninger. F.eks. fås  $\alpha_V = 4$ , når  $M_s$  er et enkeltmoment ved fagmidten;  $\alpha_V = 8$ , når  $M_s$  er jævnt fordelt, og  $\alpha_V = 1$ , når  $M_s$  er sinusfordelt. Udtrykket for  $\theta_{bz}$  kan også opfattes således, at momentlasten  $M_s$  omskrives til en sinusfordelt last  $m_{sz} = m_s \sin \frac{\pi z}{L}$  hvor  $m_s = \pi^2 M_s : (\alpha_V L)$ . Dette vil blive gjort i det følgende.

Vinkeldrejningen beregnet ud fra pladens påvirkninger bliver

$$\theta_{pz} = \frac{mf}{Ei_{pl}} \cdot \sin \frac{\pi z}{L}$$

Herefter fås ved at sætte  $\theta_{bz} = \theta_{pz}$  for alle  $z$ :

$$\max m_z = m = \frac{m_s}{1 + \frac{GI_V}{fEi_{pl}} \cdot \left(\frac{\pi f}{L}\right)^2} \quad (19)$$

Tilfælde IV: Ved opskæring langs brobanepladens midtlinie fås som i tilfælde II, at der i dette snit kun vil virke en forskydningskraft  $q_z$ , og at denne vil være sinusfordelt.

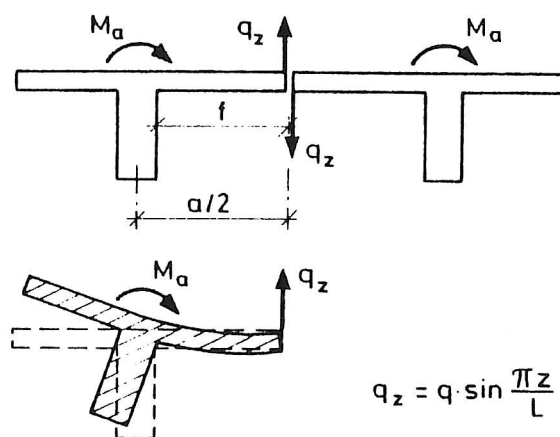


Fig. 67. Tilfælde IV, antimetrisk momentlast.

Den lodrette flytning ved A skal være nul; den består af følgende bidrag:

$y_{1z}$  fra pladens bøjning pga. lasten  $q_z$

$y_{2z}$  fra bjælkens bøjning pga. lasten  $q_z$

$y_{3z}$  fra bjælkens drejning pga. momentet  $M_a - q_z \cdot \frac{a}{2}$

Beregningen af de enkelte bidrag giver, jfr. tilfælde II og III:

$$y_{1z} = - \frac{f^3}{3Ei_{pl}} \cdot q \sin \frac{\pi z}{L}$$

$$y_{2z} = - \frac{qL^4}{\pi^4 EI_L} \cdot \sin \frac{\pi z}{L}$$

$$y_{3z} = \frac{a}{2} \cdot \theta_{bz} = \frac{a}{2} \cdot \left( \frac{\pi^2}{\alpha_V} \cdot \frac{M_a}{L} - q \cdot \frac{a}{2} \right) \frac{L^2}{\pi^2 GI_V} \cdot \sin \frac{\pi z}{L}$$

Idet  $m_a = \pi^2 M_a : (\alpha_V L)$ , jfr. tilfælde III, fås af kravet  $y_{1z} + y_{2z} + y_{3z} = 0$  for alle  $z$

$$- \frac{f^3}{3Ei_{pl}} q - \frac{qL^4}{\pi^4 EI_L} + (m_a - \frac{qa}{2}) \frac{aL^2}{2\pi^2 GI_V} = 0$$

$$\Rightarrow q = \frac{2m_a}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{I_L}{3fi_{pl}} \cdot \left(\frac{\pi f}{L}\right)^4 + \frac{EI_L}{GI_V} \cdot \left(\frac{\pi a}{2L}\right)^2} \cdot \frac{EI_L}{GI_V} \cdot \left(\frac{\pi a}{2L}\right)^2 \quad (20)$$

Taleksempel 7 (Fig. 68). Efter [21].

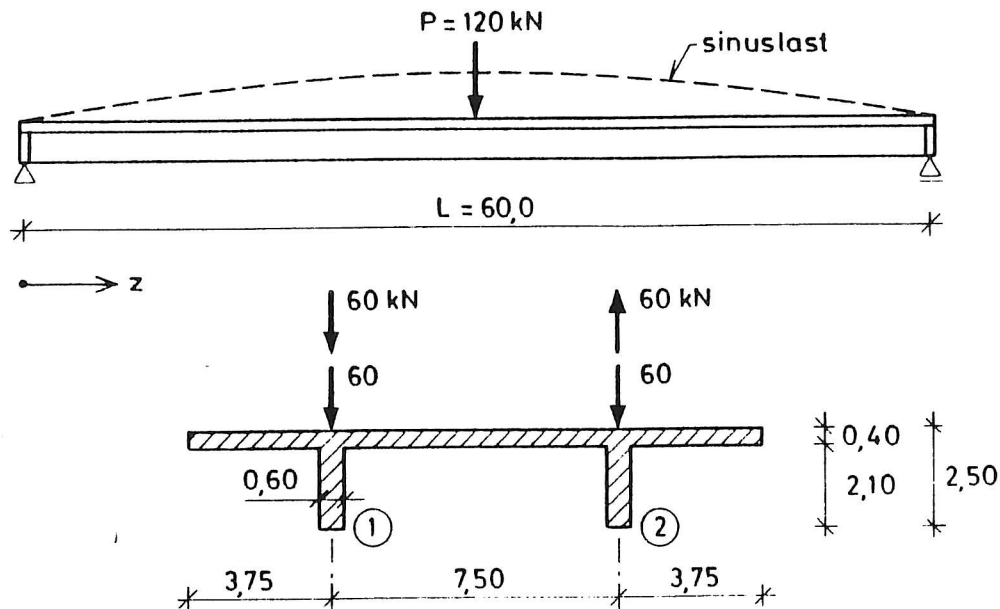


Fig. 68. Bro uden tværbjælker i faget. Mål i m.  
Last på den ene bjælke.

Opdeling af lasten i en symmetrisk og en antimetrisk del er vist på fig. 68. For den antimetriske del fås

$$P_a = \frac{\pi^4 \cdot P}{\alpha \cdot L} = \frac{\pi^4 \cdot 60}{48 \cdot 60,0} = 2,03 \text{ kN/m}$$

Tværsnitskonstanter:

$$I_L = 1,89 \text{ m}^4 \quad (\text{for halvt brotværsnit})$$

$$I_V = 0,31 \text{ m}^4 \quad (- \quad - \quad -)$$

$$i_{pl} = 0,00533 \text{ m}^4/\text{m}$$

Desuden sættes  $G = 0,43 \cdot E$ . Af (18) fås

$$q = \frac{2,03}{1 + \frac{1,89}{3 \cdot 3,45 \cdot 0,00533} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 3,45}{60}\right)^4 + \frac{1,89}{0,43 \cdot 0,31} \cdot \left(\frac{\alpha \cdot 7,50}{2 \cdot 60}\right)^2}$$



$$= \frac{2,03}{1 + 0,036 + 0,547} = 1,28 \text{ kN/m}$$

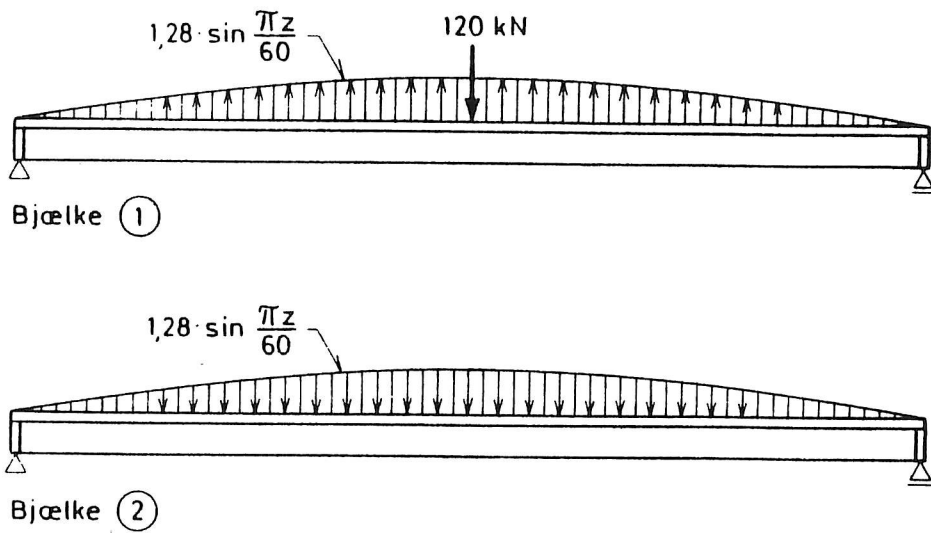


Fig. 69. Resultierende laster på bjælkerne i fig. 68.

Den resulterende last på bjælkerne fremgår af fig. 69, og bøjningsmomenterne kan nu beregnes:

$$\text{Bjælke 1: } M_{\max} = \frac{1}{4} \cdot 120 \cdot 60 = \frac{1,28}{\pi^2} \cdot 60^2 = 1333 \text{ kNm}$$

$$\text{Bjælke 2: } M_{\max} = \frac{1,28}{\pi^2} \cdot 60^2 = 467 \text{ kNm}$$

Hvis pladens lastfordelende virkning ikke var taget i regning, skulle bjælke 1 dimensioneres for 1800 kNm.

Det maksimale moment i pladen bliver  $q \cdot f = 1,28 \cdot 3,45 = 4,4$  kNm/m.

#### Taleksempel 8

Den samme konstruktion som i taleksempel 7 undersøges, denne gang med  $P = 120$  kN anbragt ved kanten af pladen.

Først føres den ydre last via brobanepladens udkræning ind til bjælke 1. Lasten  $P = 120$  kN og flytningsmomentet  $M = 450$  kNm erstattes derefter af symmetriske og antimetriske laster, se fig. 70. I denne beregning ses der for nemheds skyld bort

fra den fordeling af P og M i bjælkernes længderetning, der sker i brobanens udkrægning.

Tilfælde I og II ses at være identiske med situationen i tal-eksempel 7.

$$\text{Tilfælde III: } m_s = \frac{\pi^2 M_s}{\alpha_V \cdot L} = \frac{\pi^2 \cdot 225}{4 \cdot 60} = 9,25 \text{ kNm/m}$$

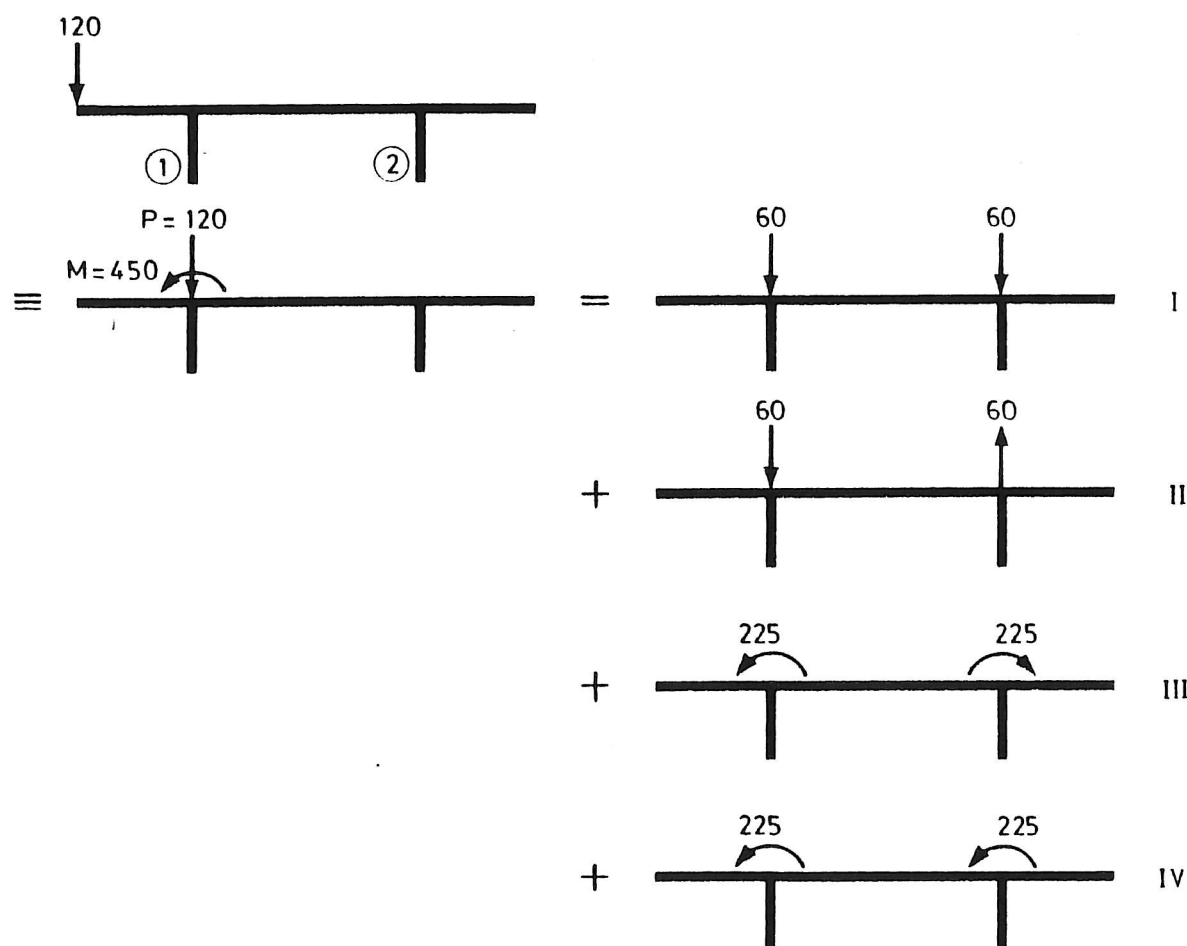


Fig. 70. Opdeling af ydre last. Enheder kN og kNm.

$$(19) \quad m = \frac{9,25}{1 + \frac{0,43 \cdot 0,31}{3,45 \cdot 0,00533} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 3,45}{60}\right)^2} = 7,48 \text{ kNm/m}$$

$$\text{Tilfælde IV: } m_a = \frac{\pi^2 M_a}{\alpha_V \cdot L} = \frac{\pi^2 \cdot 225}{4 \cdot 60} = 9,25 \text{ kNm/m}$$

$$(20) \quad q = \frac{2 \cdot 9,25}{7,50} \cdot \frac{0,547}{1 + 0,036 + 0,547} = 0,85 \text{ kN/m}$$

Med henvisning til resultaterne i eksempel 7 fås herefter følgende momenter i bjælkerne:

$$\text{Bjælke 1: } M_{\max} = 1333 + \frac{0,85}{\pi^2} \cdot 60^2 = 1643 \text{ kNm}$$

$$\text{Bjælke 2: } M_{\max} = 467 - \frac{0,85}{\pi^2} \cdot 60^2 = 157 \text{ kNm}$$

Hvis pladens lastfordelende virkning ikke var taget i regning, skulle bjælke 1 dimensioneres for en punktlast på  $120 \cdot 11,25 : 7,5 = 180$  kN og dermed et moment på  $\frac{1}{4} \cdot 180 \cdot 60 = 2700$  kNm.

Det maksimale moment i pladen bliver

$$\max m_{pl} = 7,48 + (1,28 - 0,85) \cdot 3,75 = 9,1 \text{ kNm/m}$$

Hertil kommer de lokale påvirkninger fra udkragningen, der som regel vil være væsentligt større. Det ligger dog uden for rammerne af denne fremstilling at gøre nærmere rede for dette.

#### Kasseprofil uden tværskot

Også for broer med en overbygning bestående af et kasseprofil kan det forekomme, at man af udførelsesmæssige grunde ønsker at sløjfe tværskottene. Ved beregning af lastfordelingen må man derfor inddrage bøjningsstivheden af profilet over- og underplade. Dette kan gøres på tilsvarende måde som i forrige afsnit.

På fig. 71 er situationen svarende til antimetrisk last antydnet, jfr. tilfælde II i forrige afsnit. De ubekendte forskydningskræfter  $q_{1z}$  og  $q_{2z}$  bestemmes ved at udtrykke, at de lodrette flytninger i midten af både overplade og underplade skal være nul.

Forholdene kompliceres af, at de viste "halve" tværsnit får en betydelig tværsnitshvælving. For at bevare sammenhængen i konstruktionen må der derfor tilføjes vandrette forskydningskræfter i snitfladen langs midtlinien. En korrekt beregning kan f.eks. gennemføres ved at benytte teorien for foldekonstruktioner, se [23] samt [9] og [22].

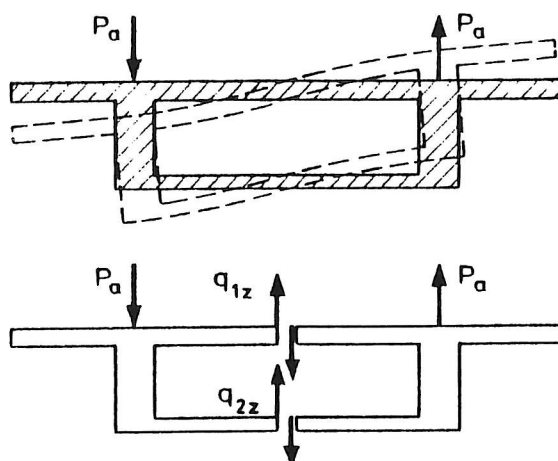


Fig. 71. Kasseprofil med antimetrisk last.

Hvis der ses bort fra den forhindrede tværsnitshvælving, svarer dette til at indføre en for lille vridningsstivhed i (18). Herved undervurderes tværsnittets evne til lastfordeling.

PLADEBROER (Beton)

For spændvidder op til 15-20 m udformes brooverbygningen ofte som en massiv plade, der eventuelt kan være kontinuerlig. Normalt beregnes pladen som en isotrop plade, men det kan også forekomme, at der må regnes med forskellige stivheder i længde- og tværretning, f.eks. på grund af udsparinger, og i så fald bør pladen regnes som en ortotrop plade. Desuden kan forspænding i (kun) den ene retning medføre, at stivheden i længde- og tværretning bliver forskellig; dette tages der dog sjældent hensyn til.

Af særlig betydning for snitkraftfordelingen er tværkontraktionsforholdet  $\nu$ , jfr. differentiallyigningerne (10) og (11). For betonbroer sættes normalt  $\nu = 0,15$  á  $0,20$ .

For plader med konstant tykkelse findes der for en række gængse bredde/længdeforhold og understøtningsbetingelser færdige løsninger til (10) og (11) i form af influensflader for snitkræfter i karakteristiske punkter af pladen, se f.eks. [20], [24] og [25]. Desuden findes i forskellige håndbøger diagrammer og formler for snitkræfter og flytninger for simple lasttilfælde, se f.eks. [8].

I det følgende omtales nogle andre beregningsmetoder, hvis anvendelse demonstreres på den samme konstruktion, således at resultaterne kan sammenlignes. Den undersøgte konstruktions geometri og belastning fremgår af fig. 72.

Den benyttede lastgruppe er den, der foreskrives af Vejdirektoratet [26].

Beregning ved hjælp af elementmetoden

Hvis man har adgang til et edb-program baseret på elementmetoden med passende udformede pladeelementer, kan der fås brugbare resultater for alle forekommende lastopstillinger. Af særlig interesse er metoder til hurtig bestemmelse af de dimensionerende momenter. Til dette brug har Statens Vejlaboratorium udsendt en rapport [1] indeholdende diagrammer baseret på beregninger med rektangulære pladeelementer med 4 knuder og 4 frihedsgrader pr. knude. En typisk elementinddeling ses på fig.

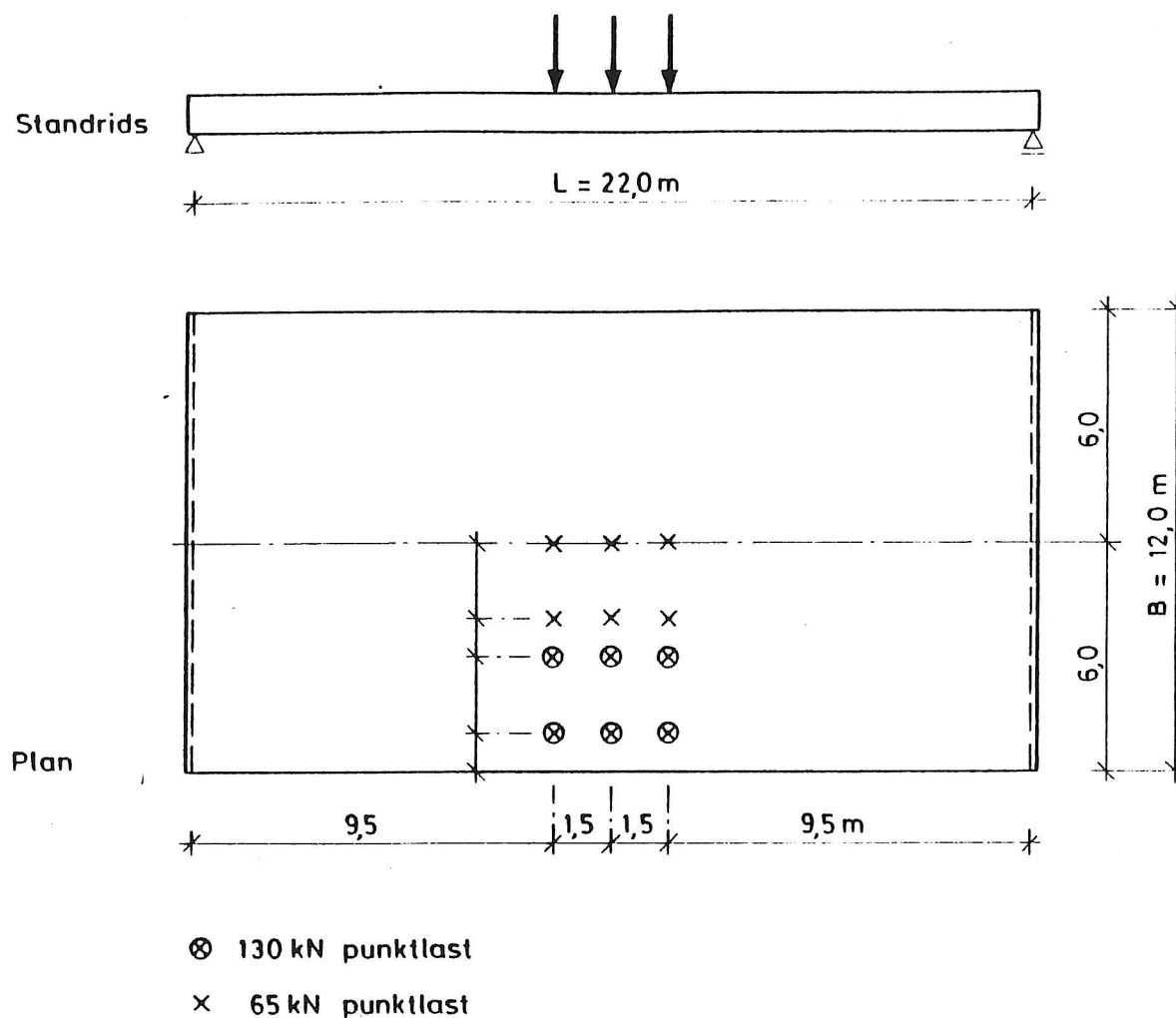


Fig. 72. Gennemgående taleksempel. Geometri og belastning.

73. Der er regnet med  $\nu = 0,15$ .

Resultaterne er afbildet i diagrammer som fig. 74 og 75. Af fig. 74 fås med  $L = 22$  m og  $B = 12$  m fordelingsbredden 9,4 m og dermed det største moment i længderetningen

$$m_z = \frac{390 \cdot (9,5 + \frac{1}{4} \cdot 22,0)}{9,4} = \underline{622 \text{ kNm/m}}$$

der optræder ude ved kanten af pladen.

6,0 m fra kanten angives momentet at være 485 kNm/m.

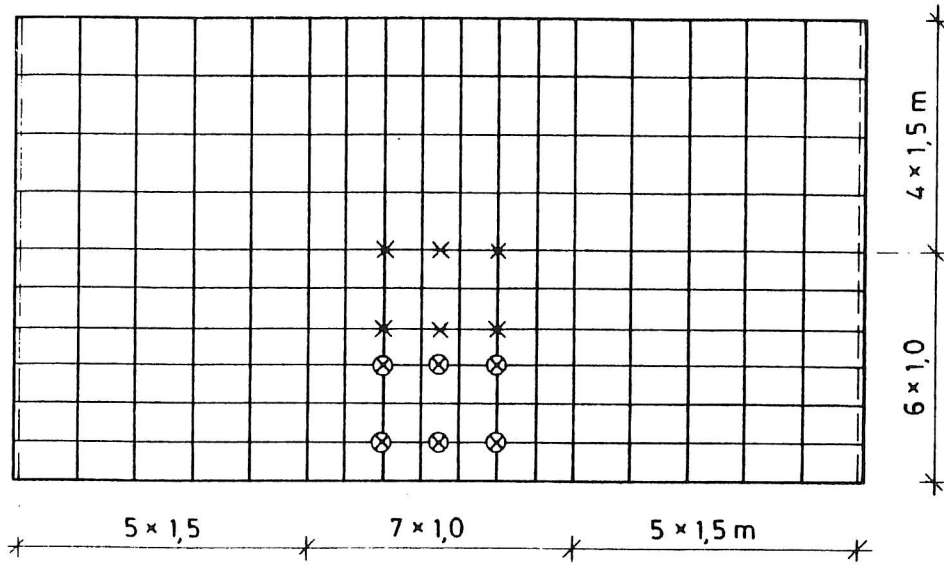


Fig. 73. Elementinddeling. [1].

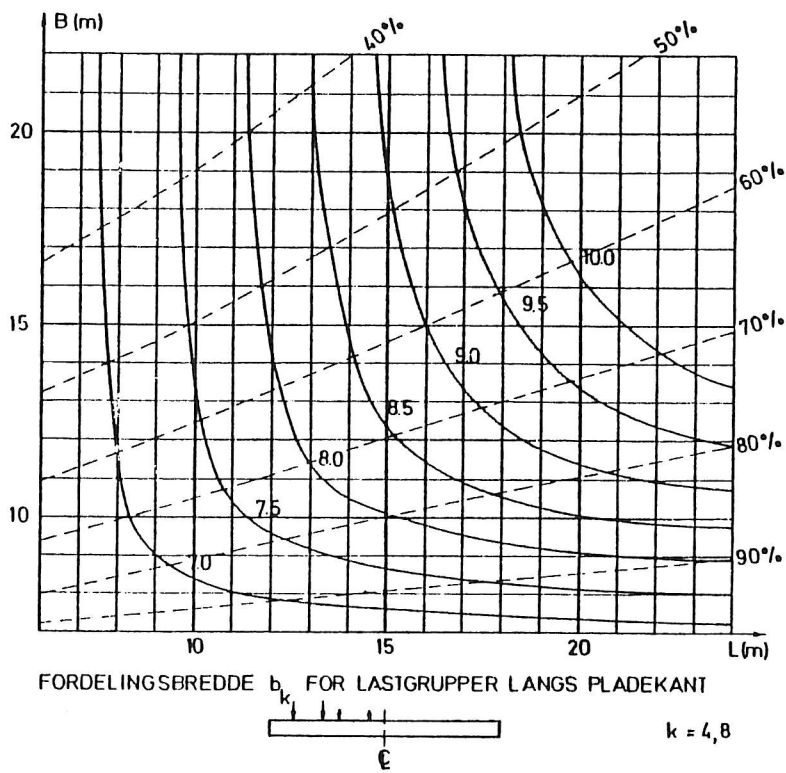
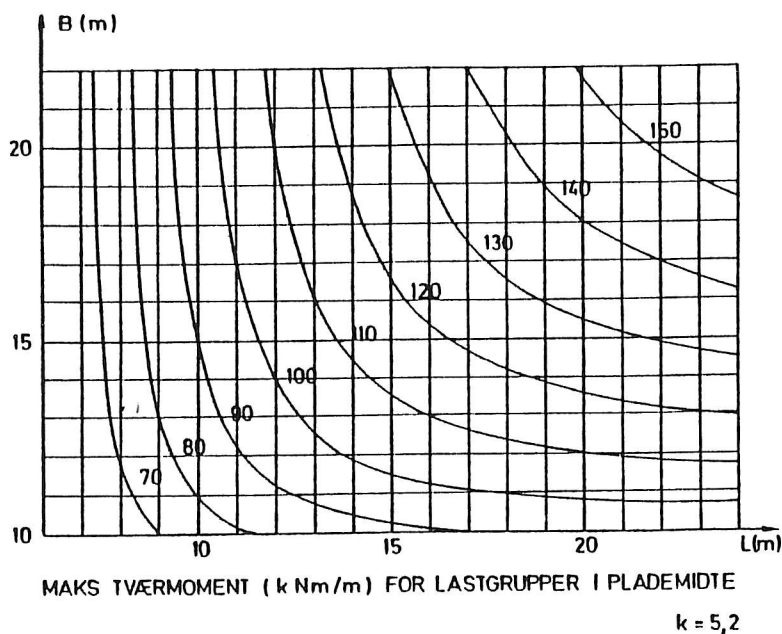


Fig. 74. Fordelingsbredde. [1].

I [1] er der kun angivet det maksimale tværmoment. Dette optræder som omtalt for last midt på bropladen. Af fig. 75 ses dets størrelse at være

$$m_x = 111 \text{ kNm/m}$$



$$\nu = 0,15$$

Fig. 75. Max. tværmoment. [1].

For lastopstilling nærmere understøtningerne angives fordelingsbredden (for momenter i længderetningen) at være lidt mindre end angivet på fig. 74. For last placeret ved et af fagets fjerdededelspunkter andrager forskellen 7-10%.

#### Beregning efter Guyon-Massonet's metode

Denne metode, der er beskrevet i et tidligere afsnit, kan bekvemt benyttes for den isotrope (eller ortotrope) plade, når blot de relevante parametre indsættes. Disse er for den isotrope plade

$$\vartheta = \frac{B}{2L} \quad \text{og} \quad \alpha = 1$$



I [27] angives med [28] som kilde, at det giver bedre resultater, hvis man i stedet for  $\vartheta$  benytter parameteren

$$\vartheta' = \frac{B}{2L} \cdot \frac{\sqrt[4]{\kappa}}{1-0,01 \cdot \kappa}$$

For et simpelt understøttet fag er  $\kappa = 1$ . For fag, der er indspændte eller indgår i en kontinuerlig konstruktion, sættes  $\kappa = f_0:f$ , hvor  $f_0$  og  $f$  er nedbøjningen ved fagmidten for en punktlast midt i det simpelt understøttede fag hhv. det indspændte/kontinuerlige fag. For et fuldt indspændt fag fås således  $\kappa = 4$  og  $\vartheta' = 1,47 \cdot \vartheta$ .

Som for risteværker gælder det, at beregningen af tværmomenter efter denne metode ikke er særlig nøjagtig.

For den aktuelle konstruktion fås

$$\vartheta' = \frac{12,0}{2 \cdot 22,0} \cdot \frac{1}{0,99} = 0,275$$

og de relevante lastfordelingsfaktorer  $K_1$  findes herefter af diagrammerne i fig. 76. Resultaterne er samlet i nedenstående tabel.

Last i $\rightarrow$	Lastfordelingsfaktor $K_1$				
	$x = b$	$0,75 b$	$0,50 b$	$0,25 b$	0
$f = b$	1,52	1,35	1,20	1,06	0,96
$f = \frac{3b}{4}$	1,34	1,24	1,14	1,05	0,98

Bemærk, at de indcirklede værdier skal være ens, hvilket følger af Maxwell's sætning.

Momenterne  $m_{z0}$  bliver, se også fig. 77

for lasten  $3P_1 = 3P_2 = 3 \cdot 130 \text{ kN}$

$$m_{z01} = m_{z02} = 130 \cdot \left(9,5 + \frac{22,0}{4}\right) : 12,0 = 162,5 \text{ kNm/m}$$

for lasten  $3P_3 = 3P_4 = 3 \cdot 65 \text{ kN}$

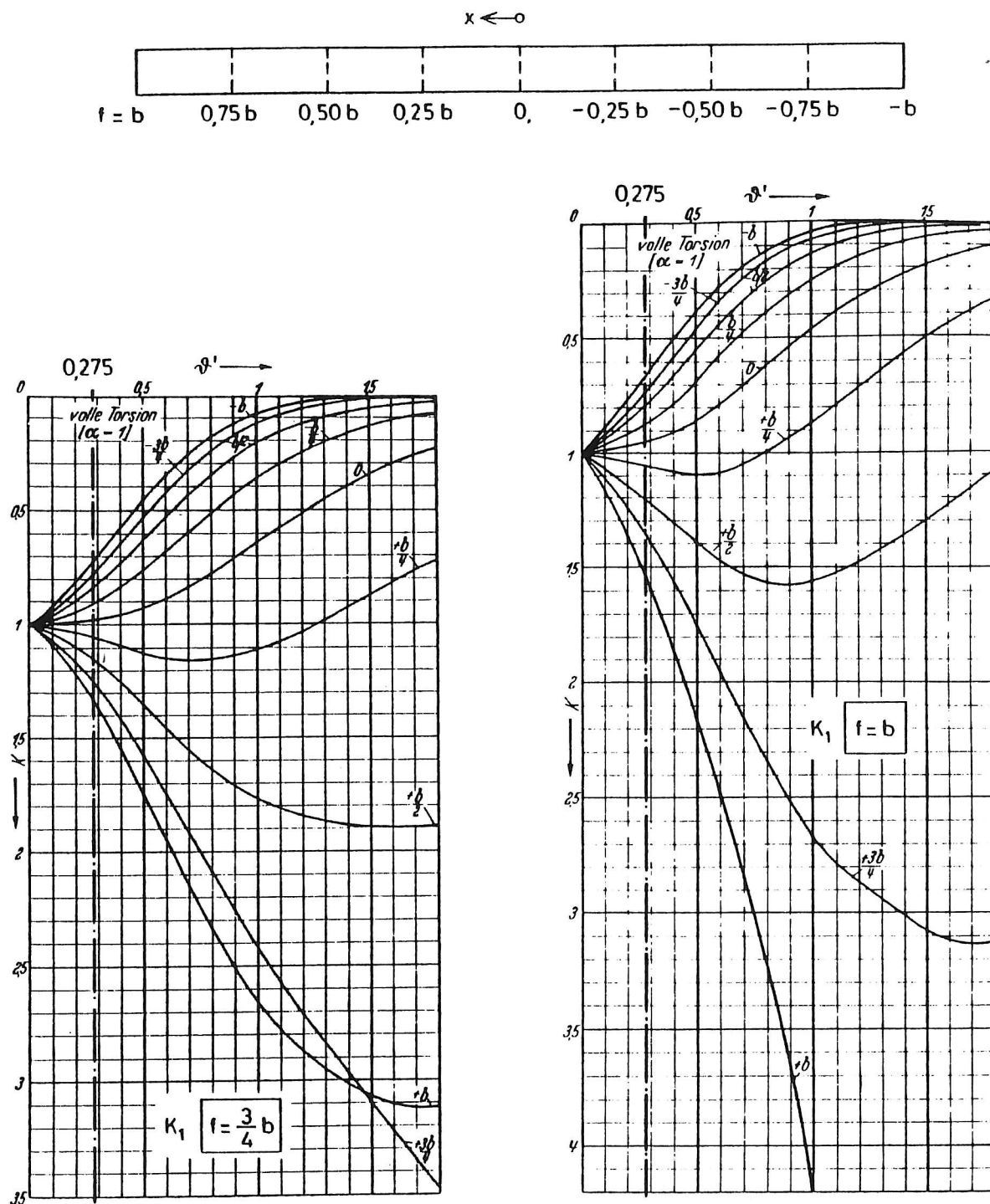


Fig. 76. Lastfordelingsfaktorer  $K_1$ . [13].

$$m_{z03} = m_{z04} = 65 \cdot \left( 9,5 + \frac{22,0}{4} \right) : 12,0 = 81,3 \text{ kNm/m}$$

Virkningen i en pladestrimmel ved broens rand ( $f = b$ ) bliver da

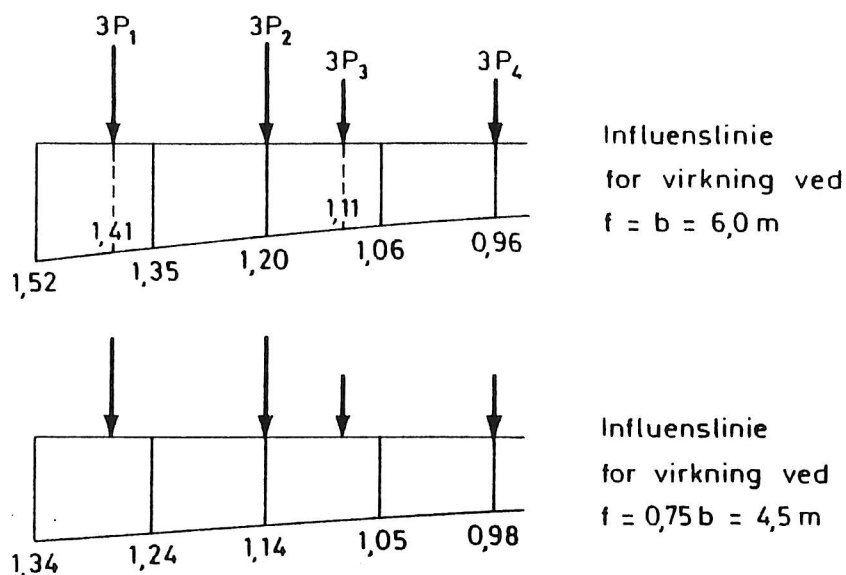


Fig. 77. Influenslinier ( $K_1$ -værdier).

$$m_z = \sum_1^4 K_{1i} \cdot m_{z0i}$$

$$= (1,41 + 1,20) \cdot 162,5 + (1,11 + 0,96) \cdot 81,3 = 592 \text{ kNm/m}$$

#### Beregning af pladen som et risteværk

Pladen opfattes som et risteværk bestående af et antal bøjnings- og vridningsstive hoved- og tværbjælker. Når beregningsresultaterne er fundet, f.eks. ved en edb-beregning, omsættes de til plademomenter ved at dele de fundne bjælkemomenter ligeligt over en bredde lig med de valgte bjælkeafstande. Det skal bemærkes, at man ved denne metode ikke får virkningen af tværkontraktionen med, dvs. der er (stiltiende) sat  $\nu = 0$ .

Hvis de tilnærmelsesmetoder, der er redegjort for i afsnittene om risteværker, skal udnyttes, må systemet simplificeres, f.eks. til at omfatte kun 1 tværbjælke.

Ved beregningen af den aktuelle plade, se fig. 72, vælges følgende fremgangsmåde:

Pladen opfattes som et risteværk med 5 vridningsstive hovedbjælker og 1 tværbjælke.

Fastsættelsen af tværbjælkens bredde er det springende punkt i denne metode. Som rettesnor haves, at man traditionelt har sat denne bredde = brofagets halve længde, jfr. f.eks. [7], svarende til en nedreværdiløsning efter plasticitetsteorien. Da der med denne beregning primært sigtes mod at give så god en beskrivelse som muligt af forholdene i brugstilstanden, vælges det at sætte bredden =  $\frac{1}{3}$  af brofagets længde. (Værdien afhænger af forholdet B:L).

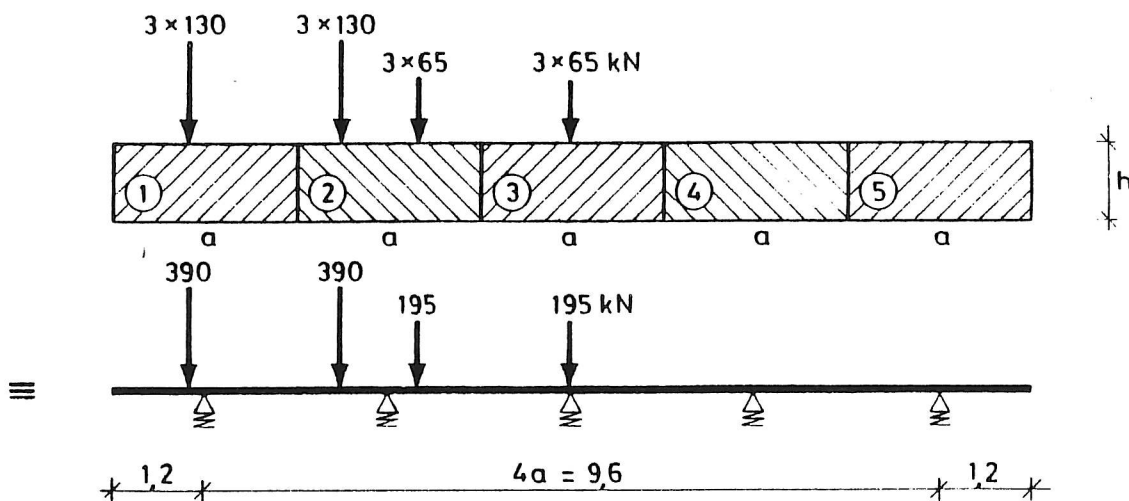


Fig. 78. Ækvivalent risteværk.

Hovedbjælkerne er bøjnings- og vridningsstive med fjederkonstanterne

$$k = \frac{48EI_L}{L^3} \quad \text{for bøjning} \quad \text{og}$$

$$k_V = \frac{4GI_V}{L} \quad \text{for vridning}$$

Inertimomenter:

$$I_L = \frac{1}{12} \cdot a \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 2,4 \cdot h^3 = 0,2 \cdot h^3$$

$$I_V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot h^3 = \frac{1}{3} \cdot 2,4 \cdot h^3 = 0,8 h^3$$

faktoren  $\frac{1}{3}$  svarer til forholdet mellem bredde og højde af hele tværsnittet  $B:h \sim \infty$ )

$$I_T = \frac{1}{12} \cdot \frac{L}{4} \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot \frac{22}{4} \cdot h^3 = 0,46 \cdot h^3$$

$$\text{Stivhedstal } C = \frac{48EI_T}{ka^3} = \frac{I_T}{I_L} \cdot \left(\frac{L}{a}\right)^3 = \frac{0,46}{0,2} \cdot \left(\frac{22}{2,4}\right)^3 = 1772$$

Efter det tidligere (side 38) anførte kan lastfordelingen med god tilnærmelse beregnes svarende til  $C = \infty$ . Formel (6) og (7) benyttes med

$$\frac{k_V}{k} = \frac{G}{12E} \cdot \frac{I_V}{I_L} \cdot L^2 = \frac{0,43}{12} \cdot 4 \cdot 22^2 = 69,4 \text{ m}^2$$

$$\text{og } \sum P \cdot e = 195 \cdot (0 + 2,0) + 390 \cdot (3,0 + 5,0) = 3510 \text{ kNm}$$

$$\text{samt } \sum P = 2 \cdot (390 + 195) = 1170 \text{ kN}$$

$$(6) \quad P_i = \frac{1170}{5} + \frac{3510}{5 \cdot 69,4 + 2 \cdot (2,4^2 + 4,8^2)} \cdot x_i$$

$$\Rightarrow P_1 = 275,6 \text{ kN} \quad P_2 = 254,8 \text{ kN}$$

$$P_3 = 234,0 \text{ kN}$$

$$P_4 = 213,2 \text{ kN} \quad P_5 = 192,4 \text{ kN}$$

$$(7) \quad V = \frac{3510}{5 + \frac{1}{69,4} \cdot 2 \cdot (2,4^2 + 4,8^2)} = 602,1 \text{ kNm}$$

Max. moment i bjælke 1

$$M_{z1} = \frac{1}{4} \cdot 275,6 \cdot 22,0 = 1516 \text{ kNm}$$

Fordelt på bredden 2,4 m fås  $m_{z1} = 632 \text{ kNm/m}$

(Med opdeling i henholdsvis 10, 20 og uendelig mange bjælker ville man få værdierne 643 kNm/m, 649 kNm/m og 655 kNm/m).

Hvis der tages hensyn til, at ikke alle punktlasterne er placeret ved fagmidten, fås - jfr. en simpelt understøttet bjælke

med tilsvarende last:

$$\max m_z \approx 632 \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3,0}{22,0}\right) = \underline{575 \text{ kNm/m}}$$

(Med  $\infty$  mange bjælker ville man få  $m_z = 595 \text{ kNm/m}$ ).

Ved midtlinien, dvs. 6 m fra kanten fås

$$m_z \approx \frac{P_3}{P_1} \cdot m_{z,\max} = \frac{234}{275,6} \cdot 575 = 488 \text{ kNm/m}$$

der stemmer godt med den side 85 anførte værdi.

Momentet i "tværbjælken" beregnes ud fra den på fig. 79 viste lastfordeling. Vridningsmomentet deles ligeledes ud over hovedbjælkernes bredde. Herved fås

$$m_v = \frac{602}{2,4} = 250,9 \text{ kNm/m}$$

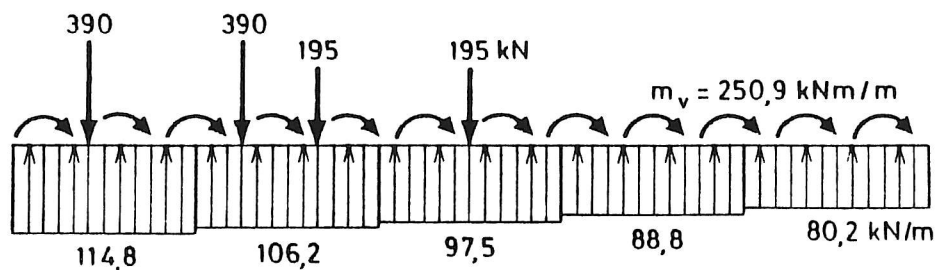


Fig. 79. Last på tværbjælke.

Momentkurven fremgår af fig. 80.

Fordelt på bredden af tværbjælken (der jo er fastsat ganske skønmæssigt!) fås

$$\max_x^+ = \frac{488}{22} \cdot 3 = 67 \text{ kNm/m}$$

$$\max_x^- = - \frac{390}{22} \cdot 3 = - 53 \text{ kNm/m}$$

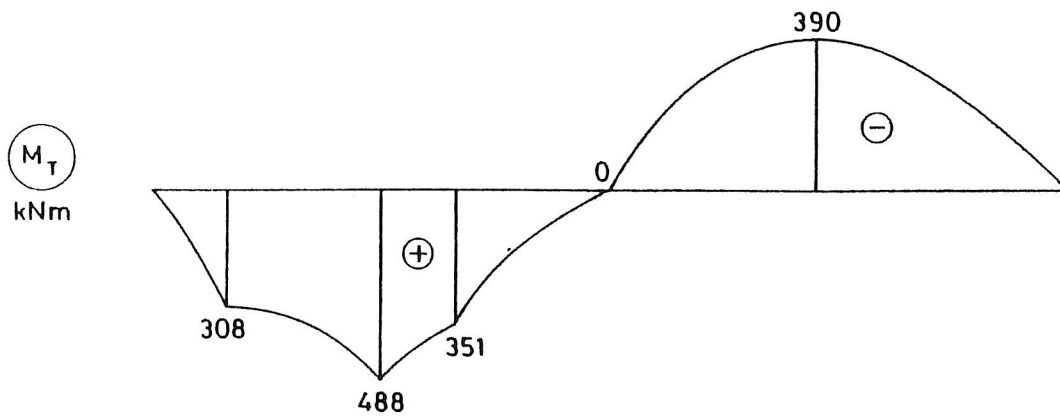


Fig. 80. Momenter i tværbjælke.

Af hensyn til sammenligning med elementmetodeberegningen undersøges også tværmomentet, når lastens resultant står midt på tværbjælken, se fig. 81.

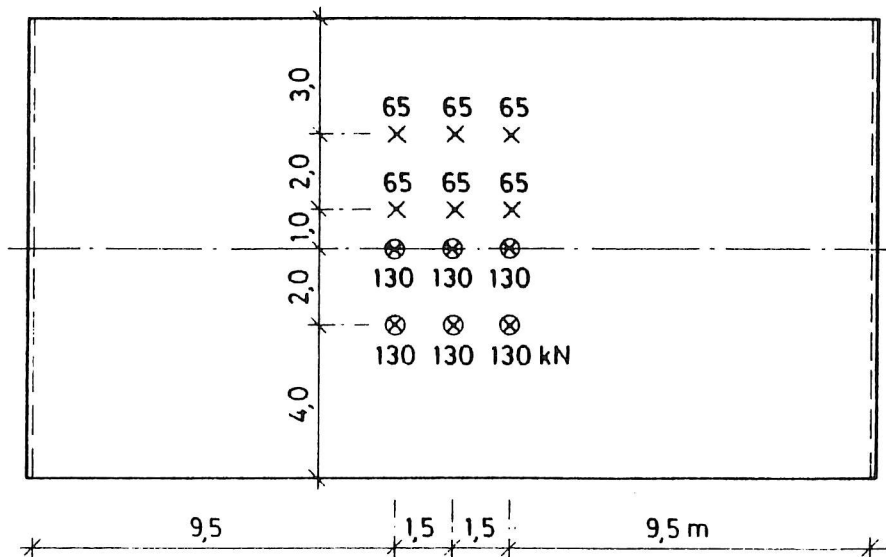


Fig. 81. Lastplacering midt på pladen.

Da tværbjælken stadig kan regnes  $\infty$  stiv, fås en jævn fordeling af lasten over hele broens bredde, dvs.

$$\max m_z = 390 \cdot \left(9,5 + \frac{22,0}{4}\right) : 12,0 = 488 \text{ kNm/m}$$

Max. moment i tværbjælke:

$$M_x = \frac{1}{8} \cdot 1170 \cdot 12,0 - 390 \cdot 2,0 = 975 \text{ kNm}$$

$$\Rightarrow m_x = \frac{975}{22,0} \cdot 3 = 133 \text{ kNm/m}$$

Bemærk, at tværmomentet her - hvilket er typisk - er større end for lastopstilling ved pladens kant.

For lastopstilling nærmere understøtningerne fås større fjederkonstant  $k$  og dermed mindre stivhedstal  $C$ . For en tværbjælke anbragt  $\frac{L}{4} = 5,5$  m fra en understøtning fås f.eks.  $k = 69,8$   $EI_L : L^3 \Rightarrow C = 1218$ . Dette er dog stadig så stor en værdi, at tværbjælken kan regnes  $\infty$  stiv  $\Rightarrow$  uændret lastfordeling mellem "bjælkerne".





## LITTERATURHENVISNINGER

- [1] Tværfordeling af trafiklast på pladebroer.  
Laboratorierapport nr. 22 udgivet af Statens Vejlaboratorium. Roskilde 1976.
- [2] Motorway Bridge across Lillebælt.  
Udg. af Chr. Ostenfeld & W. Jønson, 1970.
- [3] Sallingsundbroen. Brochure udg. af Vejdirektoratet.
- [4] Mobil-Hochstrassen halten Autos mobil.  
Merkblatt 444 udg. af Beratungsstelle für Stahlverwendung, 1969.
- [5] Sten Balle og J.C. Øllgaard: Lastfordelende tværbjælker i bjælkebroer. DIAB, København 1967.
- [6] M.P. Nielsen, A. Rathkjen, L. Pilegaard Hansen:  
Mekanik 3.1. 1977.
- [7] A. Albertsen: Konstruktiv udformning af jernbetonplader.  
Instituttet for Bygningsteknik, april 1982.
- [8] Bygg. Handbok för hus-, väg- och vattenbyggnad. Del 1B,  
Byggmästarens förlag. Stockholm 1972.
- [9] Niels J. Gimsing: Pladedragere.  
Polyteknisk forlag, Lyngby, 1980.
- [10] Heinrich Trost: Lastverteilung bei Plattenbalkenbrücken.  
Werner-Verlag, Düsseldorf 1961.
- [11] M.P. Nielsen, A. Rathkjen og L. Pilegaard Hansen:  
Mekanik 4.1, del 1. Plane statisk ubestemte konstruktioner. Aalborg/København, 1978.
- [12] M.P. Nielsen og A. Rathkjen: Mekanik 5.1, del. 1. Skiver og plader. Aalborg/København, 1981.
- [13] K. Sattler: Betrachtungen zum Berechnungsverfahren von Guyon-Massonet für freiaufliegende Trägerroste und Erweiterung dieses Verfahrens auf beliebige Systeme.  
Der Bauingenieur 1955, Heft 3.
- [14] A. Hawranek/O. Steinhardt: Theorie und Berechnung der Stahlbrücken.  
Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.

- [15] Colin O'Connor: Design of Bridge Superstructures. Wiley-Interscience, New York/London/Sydney/Toronto 1971.
- [16] K. Girkmann: Flächentragwerke. Springer-Verlag, Wien 1955.
- [17] P.B. Morice and G. Little: The analysis of right bridge decks subjected to abnormal loading. Cement and Concrete Association, London 1956.
- [18] F. Nötzold: Zur Berechnung des zweistegigen Plattenbalkens ohne Querträger. Beton- und Stahlbetonbau, 1969/2.
- [19] K. Müller: Torsionsmomente und Plattenrandmomente bei durchlaufenden zweistegigen Plattenbalken. Beton- und Stahlbetonbau, 1969/4.
- [20] Adolf Pucher: Influence Surfaces of Elastic Plates. Springer Verlag, Wien 1964.
- [21] Jens Jacob Jensen: Bjelkebroer. NTH, institutt for betongkonstruksjoner, Trondheim.
- [22] P.E. Mondorf: BETONBROER. Plade- og bjælkebroer. Polyteknisk Forlag, 1981.
- [23] Joachim Born: Hipped-plate structures. Crosby Lockwood & Son, London, 1962.
- [24] S. Krug & P. Stein: Einflussfelder orthogonal anisotroper Platten. Springer Verlag, 1961.
- [25] G. Hoeland: Stützmomenten - Einflussfelder durchlaufender Platten. Springer, 1957.
- [26] Vejregler for beregnings- og belastningsregler for vejbroer. Vejdirektoratet, juli 1984.
- [27] Jens Jacob Jensen: Platebroer. NTH, institutt for betongkonstruksjoner, Trondheim.
- [28] B. Vik: Praktische Berechnung von Plattenbrücken, mit besonderer Berücksichtigung konzentrierter Belastungen und

auf Stützen aufgelagerten Platten.  
Der Bauingenieur, 1968/1.



RETTELSESLISTE

Side	Linie	Rettelse												
For- side		Pilene på nederste figur skal være lodrette												
8		- do. -												
9	2	Konstanten $k \rightarrow K$												
10	10	6 ens $\rightarrow$ 7 ens												
10		Figurtekst ændres til: Lastfordeling i risteværk med 2-7 hovedbjælker.												
11	4-8	Tabellen ændres til <table style="margin-left: 40px;"> <tr> <td><math>n = 2</math></td> <td><math>M_T = 0</math></td> </tr> <tr> <td><math>n = 3</math></td> <td><math>M_T = 0,33 \cdot Pa</math></td> </tr> <tr> <td><math>n = 4</math></td> <td><math>M_T = 0,50 \cdot Pa</math></td> </tr> <tr> <td><math>n = 5</math></td> <td><math>M_T = 0,60 \cdot Pa</math></td> </tr> <tr> <td><math>n = 6</math></td> <td><math>M_T = 0,75 \cdot Pa</math></td> </tr> <tr> <td><math>n = 7</math></td> <td><math>M_T = 0,86 \cdot Pa</math></td> </tr> </table>	$n = 2$	$M_T = 0$	$n = 3$	$M_T = 0,33 \cdot Pa$	$n = 4$	$M_T = 0,50 \cdot Pa$	$n = 5$	$M_T = 0,60 \cdot Pa$	$n = 6$	$M_T = 0,75 \cdot Pa$	$n = 7$	$M_T = 0,86 \cdot Pa$
$n = 2$	$M_T = 0$													
$n = 3$	$M_T = 0,33 \cdot Pa$													
$n = 4$	$M_T = 0,50 \cdot Pa$													
$n = 5$	$M_T = 0,60 \cdot Pa$													
$n = 6$	$M_T = 0,75 \cdot Pa$													
$n = 7$	$M_T = 0,86 \cdot Pa$													
16		Fig. 16: $0,094 P \rightarrow - 0,094 P$												
18	5	$P_2 = P (0,279 + 0,473 - 0,065) \cdot 0,33 = 0,227 P$												
24		Fig. 24: Tværbjælkens inertimoment skal være $I_T$ og ikke $I_L$ .												
34		Fig. 33: Simpel, bevægelig understøtning mangler ved den ene ende af midterste bjælke.												
35		Fig. 34: Over venstre del af figuren tilføjes ordet "midterbjælke". Over højre del af figuren tilføjes ordet "yderbjælke".												
40	19	(6) $\rightarrow$ (6) og (6a)												
40	20	(7) $\rightarrow$ (7) og (7a)												
49		Fig. 44: De 4 pile, der parvis markerer $X_a$ på øverste, venstre del af figuren, skal vendes.												

Side	Linie	Rettelse
56	5	$m_{xy}$ mangler på venstre side af lighedstegnet
59	12	afstanden $y + \eta$
68	6	$V_3 \rightarrow V_5$ ; $V_2 \rightarrow V_6$
68	8-10	Sætningen "Under samme ..." slettes
68	11	58 kNm $\rightarrow$ 89 kNm
80	4	Bjælke 1: Midterste lighedstegn skal være et minustegn
85		Fig. 72: Målrækken for punktlasternes placering skal fra oven og nedefter være 2,0 1,0 2,0 og 1,0 m
92	1	Halv parentes mangler foran "faktoren"
92	3	Divisor 4 $\rightarrow$ 3 og dermed $I_T = 0,61 \cdot h^3$
92	4	0,46 $\rightarrow$ 0,61 og dermed $C = 2354$
93	14	$\max_x^+ \rightarrow \max m_x^+$
93	15	$\max_x^- \rightarrow \max m_x^-$
95	10	1218 $\rightarrow$ 1619







